

National University of Science and Technology Politehnica Bucharest

Department of Mathematics & Informatics

Splaiul Independenței 313

060042 Bucharest, Romania

# Sisteme de inegalități hemivariaționale și puncte de optimă proximitate

Hemivariational inequality systems  
and best proximity points

Doctorand Monica STANCIU (CONSTANTIN)

E-mail: `monica.stanciu2303@upb.ro`

## Rezumatul tezei de doctorat

Sub îndrumarea Prof. Dr. Ariana PITEA

București, 2026

**Cuvinte și fraze cheie:** sistem de inegalități de tip variațional-hemivariațional, mulțime de restricție, corp deformabil elastic, fundație de tip Winkler, punct de cea mai bună proximitate  $(\phi, \varphi)$ -punct de cea mai bună proximitate, punct fix,  $b$ -metrică, contracții de tip Istrățescu.

**Mathematics Subject Classification:** 39B72, 47H10, 54H25, 58E50, 70G75.

# Cuprins

|                                                                       |    |
|-----------------------------------------------------------------------|----|
| Motivare și direcții de studiu                                        | 5  |
| 1 Sisteme de inegalități de tip variațional-hemivariaționale          | 12 |
| 1.1 Noțiuni preliminare                                               | 14 |
| 1.2 Formularea problemei                                              | 23 |
| 1.3 Proprietăți calitative ale mulțimii soluțiilor                    | 24 |
| 1.4 Condiții de coercivitate pentru mulțimi de restricții nemărginite | 31 |
| 1.5 Aplicație în mecanica solidelor deformabile                       | 37 |
| 2 Operatori de tip proximal                                           | 53 |
| 2.1 Punct de optimă proximitate                                       | 55 |
| 2.2 Existența $(\phi, \varphi)$ -punctelor de optimă proximitate      | 57 |
| 2.3 Rezultate în spații cu $b$ -metrică                               | 65 |
| 2.4 Aplicații în teoria punctului fix                                 | 73 |
| 3 Puncte de optimă proximitate în spații metrice generalizate         | 76 |
| 3.1 Noțiuni și rezultate preliminare                                  | 77 |
| 3.2 Operatori de tip Istrățescu                                       | 82 |
| Concluzii                                                             | 89 |
| Dezvoltări viitoare                                                   | 91 |
| Bibliografie                                                          | 93 |

# Rezumat

**Obiectivul general.** Direcția de studiu a tezei este analiza neliniară. Pe de o parte, este abordat studiul unei clase de sisteme de inegalități de tip variațional-hemivariațional, în care mulțimile de restricție depind de soluțiile sistemului. Ca aplicație a rezultatelor teoretice, este studiat un model matematic ce descrie contactul dintre un corp elastic deformabil și o fundație de tip Winkler. Pe de altă parte, sunt fundamentate rezultate privind punctele de optimă proximitate în diverse contexte, pentru clase de operatori care îndeplinesc condiții de tip slab contractiv. Drept consecințe sunt obținute aplicații în teoria punctului fix.

Concluziile rezultate pun în evidență câteva caracteristici ale studiului efectuat:

- Preocupările principale constau, pe de o parte, în a demonstra că mulțimea soluțiilor unei probleme cu inegalități variațional-hemivariaționale este nevidă și slab compactă, în cazul în care mulțimile de restricții sunt mărginite. Pentru situația complementară, folosind o condiție de coercivitate, se arată că mulțimea soluțiilor acestui sistem este nevidă. Pe de altă parte, în studiul punctelor de optimă proximitate, preocuparea principală este studiul anumitor condiții în care distanța de la un punct la imaginea sa printr-un operator își atinge valoarea minimă posibilă. Depinzând de structura de tip metric avută în vedere sunt impuse condiții suplimentare care asigură existența și, în anumite cazuri, și unicitatea soluției problemei.
- În această teză sunt folosite, pe de o parte, în ceea ce privește inegalitățile hemivariaționale, proprietăți calitative ale soluțiilor problemei studiate, principiul minimax, tehnica punctului fix și condiții de coercivitate. În ceea ce privește punctele de optimă proximitate sunt folosite anumite clase de operatori care îndeplinesc proprietăți de tip contractiv și clase de contracții de tip Istrățescu, a căror existență este studiată în cadrul spațiilor metrice, a spațiilor înzestrate cu  $b$ -metrică, sau a spațiilor cu metrică generalizată.

**Metodologie.** Metodologia utilizată în această teză face apel atât la instrumente specifice analizei convexe, cât și din analiza nenetădă. În ceea ce privește sistemele de inegalități variațional-hemivariaționale, sunt considerate mai multe cazuri, în funcție de proprietățile mulțimilor de restricție. Este utilizată decuplarea sistemului, prin asocierea unei probleme auxiliare, urmată apoi de folosirea tehnicii punctului fix. Modelarea matematică utilizată pentru studiul contactului dintre un corp deformabil și o fundație de tip Winkler folosește formularea primal-duală, care conduce la un sistem cuplat de inegalități de tip variațional-hemivariațional, permițând determinarea simultană a deplasării și a tensorului tensiune.

În ceea ce privește punctele de optimă proximitate, avem în vedere o problemă de optimizare condiționată. Sunt folosite perechi de mulțimi proximale care, împreună cu tehnici specifice aplicate unor clase de operatori adecvați, conduc la fundamentarea unor rezultate privind existența unor astfel de puncte. Sunt avute în vedere contracții de tip implicit și explicit formulate cu ajutorul unor familii de funcții care satisfac proprietăți adecvate în ceea ce privește continuitatea, monotonia sau comportamentul în vecinătatea anumitor puncte.

**Contextul general.** Un domeniu de studiu important în ultimele decenii este reprezentat de teoria inegalităților variaționale, un aspect semnificativ în acest sens fiind formularea unor condiții de existență pentru soluțiile unor astfel de probleme. Acest domeniu a început să se dezvolte prin lucrarea lui Fichera [18], care a rezolvat o problemă deschisă de Signorini [30]. Studiul privind existența și unicitatea soluției unei probleme cu inegalități variaționale în diverse contexte a fost continuat de Stampacchia [31], Browder [9] și Hartman și Stampacchia [19]. O generalizare a acestor clase de inegalități o reprezintă inegalitățile hemivariaționale, introduse de Panagiotopoulos [24, 25], înlocuind funcționala convexă cu o funcțională local Lipschitz. O altă generalizare a acestor inegalități se referă la folosirea multifuncțiilor în formularea problemelor, a se vedea, de exemplu, Costea și Lupu [11], Tang *et al.* [34]. Un aspect important în demonstrarea teoremelor privind existența soluțiilor inegalităților de tip variațional, îl reprezintă teoremele de punct fix, a se vedea, de exemplu, Costea și Rădulescu [13], Costea și Varga [14], Bai *et al.* [5], Costea și Pitea [12].

Inegalitățile de tip variațional-hemivariațional au o structură care îmbină atât funcționale convexe, cât și funcții local Lipschitz, iar în ceea ce privește aplicațiile practice, acestea oferă posibilitatea modelării matematice a problemelor din mecanica de contact unilateral.

Un alt domeniu de studiu în continuă dezvoltare este reprezentat de punctele de

optimă proximitate, numite și puncte de cea mai bună proximitate, care au apărut ca răspuns pentru problemele în care ecuația  $Tx = x$  nu are soluții, unde  $T$  este o funcție a cărui domeniu și codomeniu nu coincid, iar  $x$  este un element din domeniul său de definiție. Teoria celei mai bune proximități își are originile în lucrarea lui Fan [17] care a formulat un rezultat de existență în contextul unui spațiu vectorial topologic Hausdorff local convex, pentru o funcție continuă. Printre contribuțiile remarcabile se numără și cele aduse de: Eldred și Veeramani [16], Suzuki *et al.* [33], Al-Thagafi și Shahzad [1], Basha și Shahzad [8]. Basha [7] a realizat trecerea la așa-numitele contracții proximale pentru submulțimi închise și nevide ale unui spațiu metric complet, în contextul unei aplicații continue al cărei domeniu și respectiv codomeniu coincid cu cele două mulțimi considerate. Studiile existente până în acest moment asupra celei mai bune proximități au în vedere o gamă variată de structuri, de exemplu, spațiile Banach uniform convexe, spații Banach reflexive, spații metrice hiperconvexe, sau diverse spații cu pseudometrică; în acest sens, amintim lucrările lui Al-Thagafi și Shahzad [1], Aslantas [4], Eldred și Veeramani [16], Kirk *et al.* [22], Petric și Zlatanov [26], Petric [27], Termkaev *et al.* [35], sau Zlatanov [36].

### Descrierea tezei și elemente de conținut.

Teza este alcătuită dintr-o parte introductivă, trei capitole dedicate expunerii rezultatelor obținute, o prezentare a anumitor direcții privind posibile dezvoltări viitoare și o bibliografie.

În Capitolul 1, **Sisteme de inegalități de tip variațional-hemivariațional**, este studiat sistemul cuplat de inegalități de tip variațional-hemivariațional  $(P)$ , în care mulțimile de restricție depind de soluțiile sistemului. După prezentarea anumitor noțiuni preliminare, referitoare, în principal, la multifuncții, este formulată problema de studiu, după cum urmează:

$(P)$  : Determinați  $u \in K$  și  $p \in \Lambda(u)$  astfel încât

$$\begin{cases} \mathcal{C}(v, p) - \mathcal{C}(u, p) + \langle A(u), v - u \rangle + J_{,1}^0(\gamma_1(u), \gamma_2(p); \gamma_1(v - u)) \geq 0, \\ \mathcal{C}(u, q) - \mathcal{C}(u, p) + \langle B(p), q - p \rangle + J_{,2}^0(\gamma_1(u), \gamma_2(p); \gamma_2(q - p)) \geq 0, \end{cases}$$

pentru orice  $(v, q) \in K \times \Lambda(u)$ , unde  $X, Y, Z_1, Z_2$  sunt spații Banach reale reflexive, astfel încât scufundările  $X \hookrightarrow Z_1$  și  $Y \hookrightarrow Z_2$  sunt compacte, iar  $K \subseteq X$ . Presupunem că  $\Lambda: K \rightrightarrows Y$  este o multifuncție cu valori mărginite, convexe și nevide, unde  $K \subset X$ ,  $\mathcal{C}: X \times Y \rightarrow (-\infty, +\infty]$  este convexă și inferior semicontinuă în fiecare variabilă,  $J: Z_1 \times Z_2 \rightarrow \mathbb{R}$  este local Lipschitz în fiecare variabilă și  $A: X \rightarrow X^*, B: Y \rightarrow Y^*$  sunt operatori neliniari dați.

Este analizat cazul în care mulțimile de restricție  $K$  și  $\Lambda(u)$ ,  $u \in K$ , sunt mărginite. Sunt impuse anumite ipoteze de lucru, după cum urmează:

( $H_0$ )  $X$ ,  $Y$ ,  $Z_1$ ,  $Z_2$  sunt spații Banach reale reflexive,  $0_X \ni K \subseteq X$  este o mulțime închisă și convexă și scufundările  $X \hookrightarrow Z_1$  și  $Y \hookrightarrow Z_2$  sunt compacte;

( $H_\Lambda$ ) Fie  $\Lambda: K \rightrightarrows Y$  o multifuncție care verifică următoarele proprietăți:

- (i)  $\Lambda$  are valori închise, convexe și nevide;
- (ii)  $\Lambda$  este inferior hemicontinuă de la  $X_w$  spre  $Y_s$ ;
- (iii)  $\Lambda$  este superior hemicontinuă de la  $X_w$  spre  $Y_w$ ;

( $H_C$ ) Fie  $\mathcal{C}: X \times Y \rightarrow (-\infty, +\infty]$  o funcțională proprie care are următoarele proprietăți:

- (i)  $K \times \Lambda(K) \subset \text{dom}(\mathcal{C})$ ;
- (ii)  $u \mapsto \mathcal{C}(u, p)$  este convexă și inferior semicontinuă, pentru orice  $p \in Y$ ;
- (iii)  $p \mapsto \mathcal{C}(u, p)$  este convexă și inferior semicontinuă, pentru orice  $u \in X$ ;
- (iv) dacă  $\{u_\alpha\}, \{v_\alpha\} \subset K$  și  $\{p_\alpha\} \subset \Lambda(K)$  sunt rețele astfel încât  $u_\alpha \rightharpoonup u$ ,  $v_\alpha \rightarrow v$  în  $X$  și  $p_\alpha \rightarrow p$  în  $Y$ , atunci

$$\limsup_{\alpha} [\mathcal{C}(v_\alpha, p_\alpha) - \mathcal{C}(u_\alpha, p_\alpha)] \leq \mathcal{C}(v, p) - \mathcal{C}(u, p);$$

- (v) dacă  $\{u_\alpha\} \subset K$  și  $\{p_\alpha\}, \{q_\alpha\} \subset \Lambda(K)$  sunt rețele astfel încât  $u_\alpha \rightharpoonup u$  în  $X$ , și  $p_\alpha \rightarrow p$ ,  $q_\alpha \rightarrow q$  în  $Y$ , atunci

$$\limsup_{\alpha} [\mathcal{C}(u_\alpha, q_\alpha) - \mathcal{C}(u_\alpha, p_\alpha)] \leq \mathcal{C}(u, q) - \mathcal{C}(u, p).$$

( $H_J$ ) Fie  $J: Z_1 \times Z_2 \rightarrow \mathbb{R}$  astfel încât:

- (i)  $z_1 \mapsto J(z_1, z_2)$  este local Lipschitz, pentru orice  $z_2 \in Z_2$ ;
- (ii)  $z_2 \mapsto J(z_1, z_2)$  este local Lipschitz, pentru orice  $z_1 \in Z_1$ .

( $H_A$ )  $A: X \rightarrow X^*$  este un operator neliniar astfel încât pentru oricare două rețele  $\{u_\alpha\}, \{w_\alpha\} \subset X$ , cu  $u_\alpha \rightharpoonup u$  și  $w_\alpha \rightharpoonup w$ , avem

$$\limsup_{\alpha} \langle A(w_\alpha), v - u_\alpha \rangle \leq \langle A(w), v - u \rangle, \quad \text{pentru orice } v \in X.$$

( $H_B$ )  $B: Y \rightarrow Y^*$  este un operator neliniar continuu, adică pentru orice rețea  $\{p_\alpha\} \subset Y$  cu  $p_\alpha \rightarrow p$  în  $Y$ , avem  $B(p_\alpha) \rightarrow B(p)$  în  $Y^*$ .

Studiul se face prin intermediul unei probleme asociate sistemului,  $\mathcal{P}_{aux}(\omega, r, \xi, \eta)$ , formulată cu ajutorul unor operatori adjuncți:

$\mathcal{P}_{aux}(w, r, \xi, \eta)$  : Determinați  $(u, p) \in K \times \Lambda(w)$  astfel încât

$$\begin{aligned} \mathcal{C}(v, r) - \mathcal{C}(u, r) + \mathcal{C}(w, q) - \mathcal{C}(w, p) + \langle A(w) + \gamma_1^*(\xi), v - u \rangle \\ + \langle B(r) + \gamma_2^*(\eta), q - p \rangle \geq 0, \end{aligned}$$

pentru orice  $(v, q) \in K \times \Lambda(w)$ .

În Lema 1, se demonstrează că mulțimea soluțiilor lui  $\mathcal{P}_{aux}(\omega, r, \xi, \eta)$  este convexă, slab compactă și nevidă. Cu ajutorul acesteia, este fundamentată Teorema 1, privind slab compacitatea mulțimii soluțiilor problemei (P), utilizând, de asemenea, și teorema de punct fix Bohnenblust-Karlin.

**Lema 1.** Considerăm că ipotezele  $(H_0)$ ,  $(H_C)$ ,  $(H_\Lambda)$ ,  $(H_A)$ ,  $(H_B)$  sunt îndeplinite. În plus, presupunem că submulțimea  $K \subset X$  este mărginită și  $\Lambda$  are valori mărginite. Atunci multifuncția

$$\mathcal{S}: K \times Y \times Z_1^* \times Z_2^* \rightarrow K \times Y,$$

$$\mathcal{S}(w, r, \xi, \eta) = \{(u, p) \in K \times \Lambda(w) \mid (u, p) \text{ este soluție pentru } \mathcal{P}_{aux}(w, r, \xi, \eta)\},$$

are valori convexe, slab compacte și nevide.

**Teorema 1.** Considerăm condițiile  $(H_0)$ ,  $(H_\Lambda)$ ,  $(H_C)$ ,  $(H_J)$ ,  $(H_A)$  și  $(H_B)$  ca fiind îndeplinite. Dacă mulțimea  $K \subset X$  este mărginită și  $\Lambda$  are valori mărginite, atunci mulțimea soluțiilor problemei (P) este nevidă și slab compactă.

În partea a doua a capitolului, este studiat cazul în care cel puțin una din mulțimile de restricție este nemărginită, după cum urmează:

- Dacă mulțimea  $K$  este nemărginită și  $\Lambda$  are valori mărginite, atunci presupunem că următoarele condiții, notate cu  $(C_c^1)$ , sunt îndeplinite:

$$(i) \quad \sup_{(u,p) \in K \times \Lambda(K)} L_1(u, p) < \infty, \text{ unde } L_1(u, p) \text{ este constanta Lipschitz pentru veci-} \\ \text{nătatea punctului } (\gamma_1(u), \gamma_2(p)) \in Z_1 \times Z_2 \text{ a lui } z_1 \mapsto J(z_1, z_2);$$

$$(ii) \quad \lim_{\substack{u \in K \\ \|u\|_X \rightarrow \infty}} \frac{\langle A(u), u \rangle + \mathcal{C}(u, p) - \mathcal{C}(0_X, p)}{\|u\|_X} = \infty, \text{ pentru orice } p \in \Lambda(u).$$

- Dacă mulțimea  $K$  este mărginită și  $\Lambda$  are valori nemărginite, atunci presupunem că următoarele condiții, notate cu  $(C_c^2)$ , sunt verificate:

(i)  $\sup_{(u,p) \in K \times \Lambda(K)} L_2(u, p) < \infty$ , unde  $L_2(u, p)$  este constanta Lipschitz în apropierea punctului  $(\gamma_1(u), \gamma_2(p)) \in Z_1 \times Z_2$  a lui  $z_2 \mapsto J(z_1, z_2)$ ;

(ii) Pentru orice  $u \in K$ , avem

$$\lim_{\substack{p \in \Lambda(u) \\ \|p\|_Y \rightarrow \infty}} \frac{\langle B(p), p \rangle + \mathcal{C}(u, p) - \mathcal{C}(u, 0_Y)}{\|p\|_Y} = \infty.$$

- Dacă presupunem  $K$  nemărginită și  $\Lambda$  având valori nemărginite, atunci următoarele condiții, notate cu  $(C_c^3)$ , sunt îndeplinite:

$$(i) \max \left\{ \sup_{(u,p) \in K \times \Lambda(K)} L_1(u, p), \sup_{(u,p) \in K \times \Lambda(K)} L_2(u, p) \right\} < \infty;$$

$$(ii) \lim_{\|(u,p)\| \rightarrow \infty} \frac{\langle A(u), u \rangle + \langle B(p), p \rangle + 2\mathcal{C}(u, p) - \mathcal{C}(0_X, p) - \mathcal{C}(u, 0_Y)}{\|(u, p)\|} = \infty.$$

Teoremele 2, 3 și 4 fundamentează condiții suficiente pentru existența soluțiilor sistemului considerat  $(P)$ , pentru situațiile enunțate anterior.

**Teorema 2.** *Considerăm mulțimea  $K$  nemărginită, și  $\Lambda$  având valori mărginite. Presupunem îndeplinite condițiile  $(H_0)$ ,  $(H_\Lambda)$ ,  $(H_C)$ ,  $(H_J)$ ,  $(H_A)$ ,  $(H_B)$  și  $(C_c^1)$ . Atunci problema  $(P)$  are cel puțin o soluție.*

**Teorema 3.** *Considerăm că mulțimea  $K$  este mărginită,  $\Lambda$  are valori nemărginite și  $0_Y \in \Lambda(u)$ , oricare ar fi  $u \in K$ . Dacă sunt îndeplinite condițiile  $(H_0)$ ,  $(H_\Lambda)$ ,  $(H_C)$ ,  $(H_J)$ ,  $(H_A)$ ,  $(H_B)$  și  $(C_c^2)$ , atunci problema  $(P)$  posedă cel puțin o soluție.*

**Teorema 4.** *Considerăm  $K$  nemărginită,  $\Lambda$  având valori nemărginite și  $0_Y \in \Lambda(u)$ , oricare ar fi  $u \in K$ . Dacă condițiile  $(H_0)$ ,  $(H_\Lambda)$ ,  $(H_C)$ ,  $(H_J)$ ,  $(H_A)$ ,  $(H_B)$  și  $(C_c^3)$  sunt îndeplinite, atunci problema  $(P)$  are soluție.*

Ultima parte a capitolului este dedicată studiului unei aplicații în mecanică, mai precis al unui model matematic  $(\mathcal{P}_M)$  ce descrie contactul dintre un corp deformabil și o fundație de tip Winkler, în condițiile în care procesul este presupus static și comportamentul materialului se supune unei legi constitutive scrisă ca incluziune subdiferențială.

Determinați deplasarea  $\vec{u}: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^3$  și tensorul tensiune  $\sigma: \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{S}_3$  astfel încât

$$(\mathcal{P}_M) : \left\{ \begin{array}{ll} -\text{Div}(\sigma) = \vec{f}_0, & \text{în } \Omega, \\ \sigma \in \mathcal{E}\varepsilon(\vec{u}) + \partial\psi(\varepsilon(\vec{u})), & \text{în } \Omega, \\ \vec{u} = \vec{0}, & \text{pe } \Gamma_1, \\ \sigma \vec{\nu} = \vec{f}_2, & \text{pe } \Gamma_2, \\ \begin{array}{l} u_\nu < 0 \Rightarrow \sigma_\nu = 0, \\ u_\nu \in [0, a(x)) \Rightarrow -\sigma_\nu = \phi(x, u_\nu), \\ u_\nu = a(x) \Rightarrow -\sigma_\nu \in [0, \phi(x, a(x))], \\ u_\nu > a(x) \Rightarrow \sigma_\nu = 0, \\ \vec{\sigma}_\tau = \vec{S}_\tau, \end{array} & \text{pe } \Gamma_3. \end{array} \right\}$$

Sunt îndeplinite următoarele condiții pentru problema  $(\mathcal{P}_M)$ :

$$(\mathcal{H}_f) \quad \vec{f}_0 \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^3), \quad \vec{f}_2 \in L^2(\Gamma_2; \mathbb{R}^3), \quad \vec{S}_\tau \in L^2(\Gamma_3; \mathbb{R}^3).$$

$(\mathcal{H}_\mathcal{E})$   $\mathcal{E}: \Omega \times \mathbb{S}_3 \rightarrow \mathbb{S}_3$  este un tensor de ordin patru astfel încât

- (i)  $\mathcal{E}_{ijkl} \in L^\infty(\Omega)$ ,  $1 \leq i, j, k, l \leq 3$ ;
- (ii)  $\mathcal{E}\sigma : \mu = \sigma : \mathcal{E}\mu$ , oricare ar fi  $\sigma, \mu \in \mathbb{S}_3$ ;
- (iii) există  $m_\mathcal{E} > 0$  cu  $\mathcal{E}\mu : \mu \geq m_\mathcal{E}|\mu|^2$ , oricare ar fi  $\mu \in \mathbb{S}_3$ .

$(\mathcal{H}_\psi)$   $\psi: \mathbb{S}_3 \rightarrow (-\infty, +\infty]$  este o funcțională proprie, convexă și inferior semicontinuu astfel încât

- (i)  $\psi(\mathbf{0}) \in L^1(\Omega)$ ;
- (ii)  $\text{dom}(\psi) \cap \mathcal{H} \neq \emptyset$ ;

$$(\mathcal{H}_a) \quad 0 < a(\cdot) \in L^\infty(\Gamma_3);$$

$(\mathcal{H}_\phi)$   $\phi: \Gamma_3 \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  este o funcțională Carathéodory astfel încât

- (i)  $\phi(\cdot, t)$  este măsurabilă, pentru orice  $t \in \mathbb{R}$ ;
- (i)  $\phi(x, 0) = 0$ , pentru aproape orice  $x \in \Gamma_3$ ;
- (i)  $t \mapsto \phi(x, \cdot)$  este strict crescătoare pe  $\mathbb{R}$ , pentru aproape orice  $x \in \Gamma_3$ .

Tot în acest capitol oferim formularea variațională primal-duală  $(\mathcal{P}_{p-d})$ , cea variațională primală  $(\mathcal{P}_p)$ , respectiv duală  $(\mathcal{P}_d(\vec{u}))$  a problemei  $(\mathcal{P}_M)$ , după cum urmează:

$(\mathcal{P}_{p-d})$  : Determinați deplasarea  $\vec{u} \in K$  și tensorul tensiune  $\sigma \in \Lambda(\vec{u})$ , astfel încât

$$\begin{cases} G(\varepsilon(\vec{v})) - G(\varepsilon(\vec{u})) + \int_{\Gamma_3} j_{,2}^0(x, u_\nu; v_\nu - u_\nu) da \geq \left( \vec{f}, \vec{v} - \vec{u} \right)_X, & \text{pentru orice } \vec{v} \in K, \\ G^*(\mu) - G^*(\sigma) - (\varepsilon(\vec{u}), \mu - \sigma)_{\mathcal{H}} \geq 0, & \text{pentru orice } \mu \in \Lambda(\vec{u}). \end{cases}$$

$(\mathcal{P}_p)$  : Determinați  $\vec{u} \in K$  astfel încât

$$(\mathcal{F}(\vec{u}), \vec{v} - \vec{u})_X + \Psi(\vec{v}) - \Psi(\vec{u}) + \int_{\Gamma_3} j_{,2}^0(x, u_\nu; v_\nu - u_\nu) da \geq \left( \vec{f}, \vec{v} - \vec{u} \right)_X,$$

oricare ar fi  $\vec{v} \in K$ .

$(\mathcal{P}_d(\vec{u}))$  : Determinați tensorul tensiune  $\sigma \in \mathcal{H}$  astfel încât

$$0 \in \partial \left( G^* + I_{\Lambda(\vec{u})} \right) (\sigma).$$

În Teorema 5, observăm legătura dintre cele trei tipuri de formulări variaționale.

**Teorema 5.** *Considerăm că proprietățile  $(\mathcal{H}_f)$ ,  $(\mathcal{H}_\varepsilon)$ ,  $(\mathcal{H}_\psi)$ ,  $(\mathcal{H}_a)$  și  $(\mathcal{H}_\phi)$  sunt îndeplinite. Dacă perechea  $(\vec{u}, \sigma)$  este o soluție pentru problema  $(\mathcal{P}_{p-d})$ , atunci  $\vec{u}$  este soluție pentru  $(\mathcal{P}_p)$ , respectiv  $\sigma$  este soluție pentru  $(\mathcal{P}_d(\vec{u}))$ .*

În Teorema 6 este studiată solvabilitatea problemei  $(\mathcal{P}_{p-d})$ .

**Teorema 6.** *Considerăm proprietățile  $(\mathcal{H}_f)$ ,  $(\mathcal{H}_\varepsilon)$ ,  $(\mathcal{H}_\psi)$ ,  $(\mathcal{H}_a)$  și  $(\mathcal{H}_\phi)$  ca fiind îndeplinite. Atunci problema  $(\mathcal{P}_M)$  are cel puțin o soluție slabă; mai precis, mulțimea soluțiilor problemei  $(\mathcal{P}_{p-d})$  este nevidă.*

Capitolul are la bază lucrarea [10].

Capitolul 2, **Operatori de tip contractiv** se referă la studiul anumitor condiții în care distanța de la un punct  $x$  la imaginea sa prin  $\mathcal{T}: A \rightarrow B$  își atinge valoarea minimă posibilă, anume distanța de la mulțimea  $A$  la mulțimea  $B$ , în contextul în care  $A$  și  $B$  sunt submulțimi nevide ale unei mulțimi  $X$ , înzestrată cu o structură de tip metric, fiind îndeplinite, în plus, restricții suplimentare. În acest capitol este continuat studiul din Ali *et al.* [2], respectiv Ali *et al.* [3].

În prima parte a capitolului sunt definite anumite concepte și proprietăți care sunt necesare dezvoltării rezultatelor principale din capitol, în contextul spațiilor metrice. În Definiția 2 sunt introduse condiții contractive proximale de tip  $\mathcal{L}$  cu ajutorul claselor de funcții din Definiția 1.

**Definiția 1.** Fie  $\mathfrak{M}$  clasa funcțiilor  $L: [0, \infty)^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$  care îndeplinesc ipotezele următoare:

( $M_1$ ) pentru orice şiruri  $\{x_n | x_n \geq 0\}$ ,  $\{y_n | y_n \geq 0\}$ ,  $\{z_n | z_n \geq 0\}$ , are loc echivalenţa

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$$

dacă şi numai dacă

$$\lim_{n \rightarrow \infty} L(x_n, y_n, z_n) = -\infty;$$

( $M_2$ ) Pentru orice şiruri  $\{x_n | x_n \geq 0\}$ ,  $\{y_n | y_n \geq 0\}$ ,  $\{z_n | z_n \geq 0\}$ , cu  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = \lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$ , există  $h \in (0, 1)$  astfel ca  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n^h L(x_n, y_n, z_n) = 0$ .

Familia funcţiilor pentru care este verificată condiţia ( $M_1$ ) va fi notată cu  $\mathfrak{M}_b$ .

**Definiţia 2.** Fie  $(X, d)$  un spaţiu metric şi  $A, B$  două submulţimi nevide ale lui  $X$ .  $\mathcal{T}: A \rightarrow B$  se numeşte contracţie proximală de tip  $\mathcal{L}$  dacă există  $L \in \mathfrak{M}$  şi o constantă  $k > 0$  astfel încât, pentru orice  $\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2 \in A$  cu  $d(\zeta_1, \mathcal{T}\xi_1) = d(A, B) = d(\zeta_2, \mathcal{T}\xi_2)$ , are loc inegalitatea

$$k + L(d(\zeta_1, \zeta_2), \phi(\zeta_1), \varphi(\zeta_2)) \leq L(d(\xi_1, \xi_2), \phi(\xi_1), \varphi(\xi_2)), \quad (1)$$

ori de câte ori

$$\min\{d(\zeta_1, \zeta_2) + \phi(\zeta_1) + \varphi(\zeta_2), d(\xi_1, \xi_2) + \phi(\xi_1) + \varphi(\xi_2)\} > 0.$$

Teorema 7 enunţă primul rezultat în ceea ce priveşte existenţa  $(\phi, \varphi)$ -puncte de optimă proximitate şi este fundamentat pe baza contracţiilor proximale de tip  $\mathcal{L}$ .

**Teorema 7.** Fie  $A$  şi  $B$  submulţimi nevide ale lui  $X$  şi  $(X, d)$  un spaţiu metric. Să considerăm că mulţimea  $A_0$  este închisă în raport cu metrica  $d$  şi că  $\mathcal{T}: A \rightarrow B$  este contracţie proximală de tip  $\mathcal{L}$ , care satisface următoarele condiţii:

(i)  $\mathcal{T}A_0 \subseteq B_0$ ;

(ii)  $\phi$  şi  $\varphi$  sunt inferior semicontinue.

Atunci  $\mathcal{T}$  are un  $(\phi, \varphi)$ -punct de optimă proximitate.

O altă familie de contracţii proximale de tip slab se regăseşte în Definiţia 5, fiind enunţată cu ajutorul funcţiilor din mulţimile  $\mathfrak{L}_w$  şi respectiv  $\mathfrak{W}$ .

**Definiţia 3.** Fie  $\mathfrak{L}_w$  mulţimea funcţiilor  $L: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  care verifică următoarele condiţii:

( $L_1$ )  $L$  este crescătoare, mai precis inegalitatea  $a_1 \leq a_2$  implică relaţia  $L(a_1) \leq L(a_2)$ ;

( $L_2$ ) dacă  $\{c_n | c_n > 0\}$  este un şir pentru care  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = 0$ , atunci există  $h \in (0, 1)$  astfel ca  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n^h L(c_n) = 0$ .

Utilizăm mulțimea  $\mathcal{C} = \{(0, x, y) | x, y \geq 0\}$  pentru a introduce clasa de funcții  $\mathfrak{W}$ .

**Definiția 4.** Fie  $\mathfrak{W}$  clasa funcțiilor  $W: [0, \infty)^3 \rightarrow [0, \infty)$  care verifică proprietățile:

- ( $W_1$ )  $W$  este continuă pe mulțimea  $\mathcal{C}$  și  $W(x, y, z) = 0$  dacă și numai dacă  $x = y = z = 0$ ;
- ( $W_2$ ) există  $\beta > 0$  pentru care  $\beta a \leq W(a, b, c)$ , oricare ar fi  $a, b, c \geq 0$ .

**Definiția 5.** O aplicație  $\mathcal{T}: A \rightarrow B$  se numește contracție proximală de tip  $LW$  dacă există funcțiile  $\alpha: A \times A \rightarrow [0, \infty)$ ,  $L \in \mathfrak{L}_w$ ,  $W \in \mathfrak{W}$ , și o constantă  $k > 0$  astfel că, pentru orice  $\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2 \in A$ , cu  $\alpha(\xi_1, \xi_2) \geq 1$  și  $d(\zeta_1, \mathcal{T}\xi_1) = d(A, B) = d(\zeta_2, \mathcal{T}\xi_2)$ , au loc inegalitățile  $\alpha(\zeta_1, \zeta_2) \geq 1$  și

$$k + L(W(d(\zeta_1, \zeta_2), \phi(\zeta_1), \varphi(\zeta_2))) \leq L(W(d(\xi_1, \xi_2), \phi(\xi_1), \varphi(\xi_2))), \quad (2)$$

ori de câte ori

$$\min\{W(d(\zeta_1, \zeta_2), \phi(\zeta_1), \varphi(\zeta_2)), W(d(\xi_1, \xi_2), \phi(\xi_1), \varphi(\xi_2))\} > 0.$$

A doua teoremă de existență, Teorema 8, este formulată cu ajutorul contracțiilor proximale de tip  $LW$ .

**Teorema 8.** Fie  $A$  și  $B$  submulțimi nevide ale unei mulțimi  $X$ , iar  $(X, d)$  un spațiu metric complet. Considerăm că mulțimea  $A_0$  este nevidă și închisă în raport cu metrica  $d$ , și  $\mathcal{T}: A \rightarrow B$  o contracție proximală de tip  $LW$ . Presupunem că următoarele condiții sunt verificate:

- (i)  $\mathcal{T}A_0 \subseteq B_0$ ;
- (ii) Există  $\xi_0, \xi_1 \in A_0$ , astfel ca  $\alpha(\xi_0, \xi_1) \geq 1$  și  $d(\xi_1, \mathcal{T}\xi_0) = d(A, B)$ ;
- (iii) pentru orice șir  $\{\xi_n\}$  din  $A_0$  pentru care  $\xi_n \rightarrow \xi$  și  $\alpha(\xi_n, \xi_{n+1}) \geq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , are loc inegalitatea  $\alpha(\xi_n, \xi) \geq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ ;
- (iv) Funcțiile  $\phi, \varphi: A \rightarrow [0, \infty)$  sunt inferior semicontinue și mărginite.

Atunci operatorul  $\mathcal{T}$  are un  $(\phi, \varphi)$ -punct de optimă proximitate.

A doua parte a acestui capitol este construită în contextul spațiilor înzestrate cu  $b$ -metrică de coeficient mai mare strict decât unu.

Noțiunea de  $b$ -metrică este atribuită, în literatura de specialitate, lui Bakhtin [6] și Czerwik [15].

**Definiția 6.** Fie  $X$  o mulțime nevidă și  $s \geq 1$  un număr real. O funcție  $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$  se numește  $b$ -metrică dacă, pentru orice  $x, y, z \in X$ , următoarele trei condiții sunt îndeplinite:

1.  $d(x, y) = 0$  dacă și numai dacă  $x = y$ ;
2.  $d(x, y) = d(y, x)$ ;
3.  $d(x, y) \leq s [d(x, z) + d(z, y)]$ .

În acest caz, perechea  $(X, d)$  se numește spațiu înzestrat cu  $b$ -metrică de coeficient  $s \geq 1$ .

Este menționat faptul că familia spațiilor înzestrate cu  $b$ -metrică conține strict familia spațiilor metrice, care corespunde coeficientului  $s = 1$ . De asemenea, spre deosebire de cazul metricilor clasice, continuitatea nu este o proprietate care să caracterizeze  $b$ -metricile.

Pentru a demonstra următoarea teoremă a acestui capitol este necesară introducerea unei condiții suplimentare, enunțată în Definiția 7, inspirată de lucrarea lui Lucács și Kajántó [23].

**Definiția 7.** În contextul unui spațiu cu  $b$ -metrică  $(X, d)$  de coeficient  $s$ ,  $A \subseteq X$  o mulțime nevidă și  $L: [0, \infty)^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}$ , spunem că are loc proprietatea  $(S_L)$  în raport cu  $\phi, \varphi: A \rightarrow [0, \infty)$  dacă are loc implicația de mai jos

$(S_L)$  Dacă există  $k > 0$  și  $\{\xi_n\}$  un șir din  $A$  pentru care  $d(\xi_n, \xi_{n+1}) > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , și

$$k + L(sd(\xi_n, \xi_{n+1}), \phi(\xi_n), \varphi(\xi_{n+1})) \leq L(d(\xi_{n-1}, \xi_n), \phi(\xi_{n-1}), \varphi(\xi_n)),$$

pentru orice  $n \geq 1$ , atunci

$$k + L(s^n d(\xi_n, \xi_{n+1}), \phi(\xi_n), \varphi(\xi_{n+1})) \leq L(s^{n-1} d(\xi_{n-1}, \xi_n), \phi(\xi_{n-1}), \varphi(\xi_n)),$$

pentru orice  $n \geq 1$ .

Familia de aplicații contractive proximale de tip  $L_b$ , care se regăsește în Definiția 8, este enunțată cu ajutorul mulțimii  $\mathfrak{M}_b$ .

**Definiția 8.** Fie  $(X, d)$  un spațiu înzestrat cu  $b$ -metrică,  $A$  și  $B$  două submulțimi nevide ale sale.  $\mathcal{T}: A \rightarrow B$  se numește contracție proximală de tip  $L_b$  dacă există  $L \in \mathfrak{M}_b$  și o constantă  $k > 0$  astfel încât, pentru orice  $\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2 \in A$  cu  $d(\zeta_1, \mathcal{T}\xi_1) = d(A, B) = d(\zeta_2, \mathcal{T}\xi_2)$ , are loc relația

$$k + L(sd(\zeta_1, \zeta_2), \phi(\zeta_1), \varphi(\zeta_2)) \leq L(d(\xi_1, \xi_2), \phi(\xi_1), \varphi(\xi_2)), \quad (3)$$

ori de câte ori

$$\min\{sd(\zeta_1, \zeta_2) + \phi(\zeta_1) + \varphi(\zeta_2), d(\xi_1, \xi_2) + \phi(\xi_1) + \varphi(\xi_2)\} > 0.$$

Utilizând contracția proximală de tip  $L_b$  împreună cu proprietatea  $(S_L)$ , sunt enunțate, în Teorema 9, condiții privind existența punctelor de optimă proximitate.

**Teorema 9.** *Fie  $A$  și  $B$  submulțimi nevide ale lui  $X$  și  $(X, d)$  un spațiu complet cu  $b$ -metrica  $d$ , cu coeficientul  $s > 1$ . Să considerăm că  $A_0$  este nevidă, închisă în raport cu  $d$  și că  $\mathcal{T}: A \rightarrow B$  este contracție proximală de tip  $L_b$ , care satisface următoarele condiții:*

- (i)  $\mathcal{T}A_0 \subseteq B_0$ ;
- (ii) este îndeplinită proprietatea  $(S_L)$  în raport cu  $\phi, \varphi$ ;
- (iii)  $\phi$  și  $\varphi$  sunt inferior semicontinue.

Atunci  $\mathcal{T}$  are un  $(\phi, \varphi)$ -punct de optimă proximitate.

În Definiția 9 este enunțată proprietatea  $(S_{LW})$ , care joacă un rol important în demonstrarea următoarei teoreme de cea mai bună proximitate.

**Definiția 9.** Fie  $(X, d)$  un spațiu cu  $b$ -metrică de coeficient  $s$ ,  $A \subseteq X$  o mulțime nevidă,  $L: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  și  $W: [0, \infty)^3 \rightarrow [0, \infty)$ . Spunem că proprietatea  $(S_{LW})$  este îndeplinită în raport cu  $\phi, \varphi: A \rightarrow [0, \infty)$  dacă are loc următoarea implicație:

$(S_{LW})$  Dacă există  $k > 0$  și un șir  $\{\xi_n\} \subset A$ ,  $d(\xi_n, \xi_{n+1}) > 0$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , astfel încât

$$k + L(W(sd(\xi_n, \xi_{n+1}), \phi(\xi_n), \varphi(\xi_{n+1}))) \leq L(W(d(\xi_{n-1}, \xi_n), \phi(\xi_{n-1}), \varphi(\xi_n))),$$

pentru orice  $n \geq 1$ , atunci

$$k + L(W(s^n d(\xi_n, \xi_{n+1}), \phi(\xi_n), \varphi(\xi_n))) \leq L(W(s^{n-1} d(\xi_{n-1}, \xi_n), \phi(\xi_{n-1}), \varphi(\xi_n))),$$

oricare ar fi  $n \geq 1$ .

Utilizăm mulțimea de funcții  $\mathfrak{W}$  în Definiția 10, pentru a introduce un nou tip de contracție proximală de tip slab.

**Definiția 10.** Fie  $(X, d)$  un spațiu înzestrat cu  $b$ -metrica  $d$ ,  $A, B$  două submulțimi nevide ale lui  $X$ ,  $L: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  o funcție crescătoare și  $W \in \mathfrak{W}$ . Spunem că  $\mathcal{T}: A \rightarrow B$  este contracție proximală de tip  $LW_b$  dacă există o constantă  $k > 0$  astfel că, pentru

orice  $\xi_1, \xi_2, \zeta_1, \zeta_2 \in A$ , cu  $\alpha(\xi_1, \xi_2) \geq 1$  și  $d(\zeta_1, \mathcal{T}\xi_1) = d(A, B) = d(\zeta_2, \mathcal{T}\xi_2)$ , au loc inegalitățile  $\alpha(\zeta_1, \zeta_2) \geq 1$  și

$$k + L(W(sd(\zeta_1, \zeta_2), \phi(\zeta_1), \varphi(\zeta_2))) \leq L(W(d(\xi_1, \xi_2), \phi(\xi_1), \varphi(\xi_2))), \quad (4)$$

ori de câte ori

$$\min\{W(sd(\zeta_1, \zeta_2), \phi(\zeta_1), \varphi(\zeta_2)), W(d(\xi_1, \xi_2), \phi(\xi_1), \varphi(\xi_2))\} > 0.$$

Teorema 10 oferă condiții de existență pentru punctele de optimă proximitate, folosind Definiția 9 și respectiv Definiția 10.

**Teorema 10.** *Fie  $A$  și  $B$  submulțimi nevide ale unei mulțimi  $X$ , iar  $(X, d)$  un spațiu complet înzestrat cu  $b$ -metrica  $d$  cu coeficientul  $s > 1$ . Considerăm mulțimea  $A_0$  nevidă, închisă în raport cu  $b$ -metrica  $d$ , și  $\mathcal{T}: A \rightarrow B$  o contracție proximală de tip  $LW_b$ . Presupunem că următoarele condiții sunt verificate:*

- (i)  $\mathcal{T}A_0 \subseteq B_0$ ;
- (ii) Există  $\xi_0, \xi_1 \in A_0$ , astfel ca  $\alpha(\xi_0, \xi_1) \geq 1$  și  $d(\xi_1, \mathcal{T}\xi_0) = d(A, B)$ ;
- (iii) Pentru orice șir  $\{\xi_n\}$  din  $A_0$  pentru care  $\xi_n \rightarrow \xi$  și  $\alpha(\xi_n, \xi_{n+1}) \geq 1$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , are loc inegalitatea  $\alpha(\xi_n, \xi) \geq 1$ , pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ ;
- (iv) Este îndeplinită proprietatea  $(S_{LW})$ ;
- (v) Funcțiile  $\phi, \varphi: A \rightarrow [0, \infty)$  sunt inferior semicontinue și mărginite.

Atunci operatorul  $\mathcal{T}$  are un  $(\phi, \varphi)$ -punct de optimă proximitate.

Capitolul se încheie prin analizarea cazului în care aplicația  $\mathcal{T}$  are drept domeniu și condomeniu însăși mulțimea  $X$ , caz în care suntem conduși spre teoreme de punct fix.

Teorema 11 și respectiv Teorema 12 reprezintă consecințe în teoria punctelor fixe în contextul spațiilor metrice clasice.

**Teorema 11.** *Fie  $(X, d)$  un spațiu metric complet. Considerăm că  $\mathcal{T}: X \rightarrow X$  satisface următoarele condiții:*

- (i) există  $L \in \mathfrak{M}$  și  $k > 0$  astfel încât

$$k + L(d(\mathcal{T}\xi, \mathcal{T}\zeta), \phi(\mathcal{T}\xi), \varphi(\mathcal{T}\zeta)) \leq L(d(\xi, \zeta), \phi(\xi), \varphi(\zeta)),$$

ori de câte ori  $\min\{d(\mathcal{T}\xi, \mathcal{T}\zeta) + \phi(\mathcal{T}\xi) + \varphi(\mathcal{T}\zeta), d(\xi, \zeta) + \phi(\xi) + \varphi(\zeta)\} > 0$ , unde  $\xi, \zeta \in X$ ;

(ii)  $\phi$  și  $\varphi$  sunt inferior semicontinue.

Atunci  $\mathcal{T}$  are un  $(\phi, \varphi)$ -punct fix.

**Teorema 12.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric complet. Considerăm că  $\mathcal{T}: X \rightarrow X$  satisface următoarele condiții:

(i) există  $L \in \mathfrak{L}_w$ ,  $W \in \mathfrak{W}$  și o constantă  $k > 0$  astfel că

$$k + L(W(d(\mathcal{T}\xi, \mathcal{T}\zeta), \phi(\mathcal{T}\xi), \varphi(\mathcal{T}\zeta))) \leq L(W(d(\xi, \zeta), \phi(\xi), \varphi(\zeta))),$$

ori de câte ori are loc inegalitatea  $\min\{W(d(\mathcal{T}\xi, \mathcal{T}\zeta), \phi(\mathcal{T}\xi), \varphi(\mathcal{T}\zeta)), W(d(\xi, \zeta), \phi(\xi), \varphi(\zeta))\} > 0$ , unde  $\xi, \zeta \in X$ ;

(ii)  $\phi$  și  $\varphi$  sunt inferior semicontinue și mărginite.

Atunci  $\mathcal{T}$  are un  $(\phi, \varphi)$ -punct fix.

În ceea ce privește spațiile înzestrate cu  $b$ -metrică, Teorema 13 și respectiv Teorema 14 reprezintă consecințe ale rezultatelor privind optima proximitate.

**Teorema 13.** Fie  $(X, d)$  un spațiu complet cu  $b$ -metrica  $d$ , cu coeficientul  $s > 1$ . Să considerăm că  $\mathcal{T}: X \rightarrow X$  satisface următoarele condiții:

(i) există  $L \in \mathfrak{M}_b$  și  $k > 0$  pentru care

$$k + L(sd(\mathcal{T}\xi, \mathcal{T}\zeta), \phi(\mathcal{T}\xi), \varphi(\mathcal{T}\zeta)) \leq L(sd(\xi, \zeta), \phi(\xi), \varphi(\zeta)),$$

ori de câte ori  $\min\{sd(\mathcal{T}\xi, \mathcal{T}\zeta) + \phi(\mathcal{T}\xi) + \varphi(\mathcal{T}\zeta), sd(\xi, \zeta), \phi(\xi), \varphi(\zeta)\} > 0$ , unde  $\xi, \zeta \in X$ .

(ii) este îndeplinită proprietatea  $(S_L)$  în raport cu  $\phi, \varphi$ ;

(iii)  $\phi$  și  $\varphi$  sunt inferior semicontinue.

Atunci  $\mathcal{T}$  are un  $(\phi, \varphi)$ -punct fix.

**Teorema 14.** Fie  $(X, d)$  un spațiu complet cu  $b$ -metrica  $d$ , cu coeficientul  $s > 1$ . Să considerăm că  $\mathcal{T}: X \rightarrow X$  satisface următoarele condiții:

(i) există o constantă  $k > 0$ ,  $L: (0, \infty) \rightarrow \mathbb{W}$  crescătoare și  $W \in \mathfrak{R}$ , pentru care

$$k + L(W(sd(\mathcal{T}\xi, \mathcal{T}\zeta), \phi(\mathcal{T}\xi), \varphi(\mathcal{T}\zeta))) \leq L(W(d(\xi, \zeta), \phi(\xi), \varphi(\zeta))),$$

ori de câte ori  $\min\{W(sd(\mathcal{T}\xi, \mathcal{T}\zeta), \phi(\mathcal{T}\xi), \varphi(\mathcal{T}\zeta)), W(d(\xi, \zeta), \phi(\xi), \varphi(\zeta))\} > 0$ ,  $\xi, \zeta \in X$ ;

(ii) este îndeplinită proprietatea  $(S_{LW})$  în raport cu  $\phi, \varphi$ ;

(iii)  $\phi$  și  $\varphi$  sunt inferior semicontinue și mărginite.

Atunci  $\mathcal{T}$  are un  $(\phi, \varphi)$ -punct fix.

Capitolul are la bază lucrarea [28].

În Capitolul **Puncte de optimă proximitate în spații metrice generalizate**, sunt generalizate rezultatele lui Istrățescu [20] atât din punct de vedere al obiectului de studiu, fiind abordat studiul punctelor de optimă proximitate, dar și în ceea ce privește spațiul ambient folosit, fiind utilizat un spațiu metric generalizat inspirat de Jleli și Samet [21], care se regăsește în Definiția 11.

**Definiția 11** ([21]). Fie  $X$  o mulțime nevidă și  $d: X \times X \rightarrow [0, \infty)$  o funcție care verifică următoarele proprietăți:

$d_1$ ) dacă  $d(x, y) = 0$ , atunci  $x = y$ , unde  $x, y \in X$ ;

$d_2$ )  $d(x, y) = d(y, x)$ , pentru orice  $x, y \in X$ ;

$d_3$ ) există  $C > 0$  astfel încât, pentru orice  $x, y \in X$  și orice șir  $\{x_n\}$  care are proprietatea că  $d(x_n, x) \rightarrow 0$ , are loc inegalitatea

$$d(x, y) \leq C \limsup_{n \rightarrow \infty} d(x_n, y).$$

Este utilizat un spațiu metric generalizat  $(X, d)$ , unde  $d$  respectă toate condițiile din Definiția 11 și, în plus,  $d(x, x) = 0$ , pentru orice  $x \in X$ .

Menționăm faptul că familia metricilor generalizate conține clase importante, cum ar fi spațiile metrice, spațiile vectoriale modulare cu proprietatea lui Fatou, sau spațiile cu  $b$ -metrică.

În contextul punctelor de optimă proximitate, este definită mulțimea

$$\mathcal{O}_T(x) = \{\{x_n\} \subseteq A \mid x_0 = x, d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)\},$$

numită orbita lui  $x$  prin  $T$ , unde  $(X, d)$  este un spațiu metric generalizat,  $A, B$  submulțimi nevide ale lui  $X$  și  $T: A \rightarrow B$ .

Punctul  $x \in X$  se numește punct periodic de optimă proximitate pentru  $T$  dacă există  $\{x_n\} \in \mathcal{O}_T(x)$  și  $m \geq 1$  pentru care  $d(x, Tx_m) = d(A, B)$ . Aplicația  $T$  îndeplinește condiția  $P_b$  dacă mulțimea punctelor periodice de optimă proximitate coincide cu cea a punctelor de optimă proximitate pentru  $T$ .

Sunt utilizate aplicații  $T$  pentru care este verificată proprietatea  $P_b$  (a se vedea, de exemplu, Sahin *et al.* [29]).

În Teorema 15 este impusă o condiție de mărginire a anumitor șiruri definite prin intermediul perechilor de submulțimi proximale, după cum urmează.

Pentru un șir  $\{x_n\}$  din mulțimea  $X$ , unde  $(X, d)$  este un spațiu metric generalizat, sunt considerate mulțimile

$$\delta(d, \{x_n\}) = \sup\{d(x_m, x_p) \mid m, p \in \mathbb{N}\},$$

și

$$\delta_{n_0}(d, \{x_n\}) = \sup\{d(x_m, x_p) \mid m, p \in \mathbb{N}, m, p \geq n_0\},$$

unde  $n_0 \in \mathbb{N}$ .

Datorită proprietății de simetrie, rezultă că

$$\delta_{n_0}(d, \{x_n\}) = \sup\{d(x_m, x_p) \mid m, p \in \mathbb{N}, p \geq m \geq n_0\}.$$

Se observă că

$$\delta_p(d, \{x_n\}) \leq \delta_m(d, \{x_n\}) \leq \delta(d, \{x_n\}), p \geq m.$$

**Teorema 15.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric generalizat complet și  $T: A \rightarrow B$  o aplicație pentru care  $TA_0 \subseteq B_0$ .

Presupunem că sunt îndeplinite următoarele condiții:

i) există  $a_1, a_2, \dots, a_{p-1}, b_1, \dots, b_{p-2} \in [0, 1)$ , cu  $0 < a_1 + a_2 + \dots + a_{p-1} + b_1 + \dots + b_{p-2} < 1$ ,  $p \geq 3$ , astfel ca, pentru orice  $z_i$  distincte,  $i \in \mathbb{N}$ ,  $y_i \in A$  cu  $d(y_i, Tz_i) = d(A, B)$ , are loc inegalitatea

$$\begin{aligned} d(y_{p-1}, y_p) &\leq a_1 d(z_1, z_2) + a_2 d(z_2, z_3) + \dots + a_{p-1} d(z_{p-1}, z_p) \\ &\quad + b_1 d(y_1, y_2) + \dots + b_{p-2} d(y_{p-2}, y_{p-1}); \end{aligned} \quad (5)$$

ii)  $A_0$  este închisă în raport cu  $d$ ;

iii) pentru orice șir  $\{x_n\} \subseteq A$  pentru care  $d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , are loc inegalitatea  $\delta(d, \{x_n\}) < \infty$ .

Atunci  $T$  are un punct de optimă proximitate, care este unic.

Corolarul 1 și respectiv Corolarul 2 reprezintă consecințe interesante din literatura de specialitate pentru Teorema 15.

**Corolarul 1.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric generalizat complet și  $T: A \rightarrow B$  un operator pentru care  $TA_0 \subseteq B_0$ .

Presupunem că sunt verificate următoarele ipoteze:

*i)* există  $a, b \in [0, 1)$ ,  $0 < a + b < 1$ , astfel că, pentru orice  $x_i \in A$  distincte,  $y_i \in A$  cu  $d(y_i, Tx_i) = d(A, B)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , are loc inegalitatea

$$d(y_2, y_3) \leq ad(x_1, x_2) + bd(x_2, x_3). \quad (6)$$

*ii)*  $A_0$  este închisă în raport cu  $d$ ;

*iii)* pentru orice şir  $\{x_n\} \subseteq A$  cu proprietatea că  $d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , are loc relaţia  $\delta(d, \{x_n\}) < \infty$ .

Atunci  $T$  are un punct de cea mai bună proximitate, care este unic.

**Corolarul 2.** Fie  $(X, d)$  un spaţiu metric generalizat şi  $T: A \rightarrow B$  un operator pentru care  $TA_0 \subseteq B_0$ .

Presupunem că sunt satisfăcute următoarele condiţii:

*i)* există  $a, b \in [0, 1)$ ,  $0 < a + b < 1$ , astfel ca, pentru orice  $x_i \in A$  distincte,  $y_i \in A$  cu  $d(y_i, Tx_i) = d(A, B)$ , unde  $i \in \mathbb{N}$ , are loc inegalitatea

$$d(y_2, y_3) \leq ad(x_1, x_2) + bd(y_1, y_2); \quad (7)$$

*ii)*  $A_0$  este închisă în raport cu  $d$ ;

*iii)* pentru orice şir  $\{x_n\} \subseteq A$  cu  $d(x_{n+1}, Tx_n) = d(A, B)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , are loc inegalitatea  $\delta(d, \{x_n\}) < \infty$ .

Atunci  $T$  are un punct de optimă proximitate, care este unic.

Spre deosebire de rezultatul din Teorema 15, Teorema 16 nu necesită ipoteze legate de mărginire, însă constanta metricii generalizate poate lua valori într-un anumit interval.

**Teorema 16.** Fie  $(X, d)$  un spaţiu metric generalizat complet cu constanta  $C$ , pentru care  $Ca_p < 1$ , şi  $T: A \rightarrow B$  un operator pentru care  $TA_0 \subseteq B_0$ .

Presupunem că sunt verificate următoarele ipoteze:

*i)* există  $a_1, a_2, \dots, a_p \in [0, 1)$ ,  $0 < a_1 + a_2 + \dots + a_p < 1$ ,  $p \geq 2$ , astfel ca pentru orice  $z_i \in A$  distincte,  $i = \overline{1, p}$  şi  $y_i \in A$ , cu  $d(y_i, Tz_i) = d(A, B)$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , are loc inegalitatea

$$d(y_{p-1}, y_p) \leq a_1 d(z_1, y_1) + a_2 d(z_2, y_2) + \dots + a_p d(z_p, y_p), \quad (8)$$

*ii)*  $A_0$  este închisă în raport cu  $d$ .

Atunci  $T$  are un punct de optimă proximitate, care este unic.

Pe baza Teoremei 16, sunt obţinute rezultate existente în literatura de specialitate, enunţate în Corolarul 3.

**Corolarul 3.** Fie  $(X, d)$  un spațiu metric generalizat complet cu constantă subunitară și  $T: X \rightarrow X$  o aplicație.

Să presupunem că există  $a, b \in [0, 1)$ ,  $0 < a + b < 1$ , astfel ca, pentru orice  $x, y$  din  $X$ , are loc relația

$$d(Tx, Ty) \leq ad(y, Ty) + bd(x, Tx). \quad (9)$$

Atunci  $T$  are un punct fix, care este unic.

Acest capitol este bazat pe lucrarea [32].

# Bibliografie

1. Al-Thagafi MA, Shahzad N, Convergence and existence results for best proximity points, *Nonlinear Anal.*, 70, 2009, 3665-3671
2. Ali MU, Ionescu C, **Stanciu M**, On  $(\phi, \varphi)$ -best proximity points for proximal type contraction mappings, *U. Politeh. Buch. Sci. Bull. Ser. A*, 83, 2021, 15-26
3. Ali MU, Pitea A, **Stanciu M**, On the existence of  $(\eta, \zeta)$ -fixed points and  $(\eta, \zeta)$ -best proximity points for Wardowski type mappings, *J. Nonlinear Convex Anal.*, 23, 2022, 713-725
4. Aslantas M, A new contribution to best proximity point theory on quasi metric spaces and an application to nonlinear integral equations, *Optimization*, 72, 2023, 2851-2864
5. Bai YR, Migórski S, Nguyen VT, Peng JW, Existence of solution to a new class of coupled variational-hemivariational inequalities, *J. Nonlinear Var. Anal.*, 6, 2022, 499-516
6. Bakhtin IA, The contraction mapping principle in almost metric spaces, *Funct. Anal.*, 30, 1989, 26-37
7. Basha S, Best proximity point theorems, *J. Approx. Theory*, 163, 2011, 1772-1781
8. Basha S, Shahzad N, Best proximity point theorems for generalized proximal contractions, *Fixed Point Theory Appl.*, 2012, art. No. 2012:42
9. Browder F, Nonlinear monotone operators and convex sets in Banach spaces, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 71, 1965, 780-785
10. Cen J, Costea N, Dumitrescu D, **Stanciu M**, A set-valued approach for quasi-variational-hemivariational inequality systems, *J. Fixed Point Theory Appl.*, 27, 2025, 64

11. Costea N, Lupu C, On a class of variational-hemivariational inequalities involving set-valued mappings, *Adv. Pure Appl. Math.*, 1, 2010, 233-246
12. Costea N, Pitea A, Existence results for mixed hemivariational-like inequalities involving set-valued maps, *Optimization*, 70, 2021, 269-305
13. Costea N, Rădulescu V, Inequality problems of quasi-hemivariational type involving set-valued operators and a nonlinear term, *J. Glob. Optim.*, 52, 2012, 743-756
14. Costea N, Varga C, Systems of nonlinear hemivariational inequalities and applications, *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 41, 2013, 39-65
15. Czerwik S, Contraction mappings in  $b$ -metric spaces, *Acta Math. Inform. Univ. Ostrav.*, 1, 1993, 5-11
16. Eldred A, Veeramani P, Existence and convergence of best proximity points, *J. Math. Anal. Appl.*, 323, 2006, 1001-1006
17. Fan K, Extensions of two fixed point theorems of F.E. Browder, *Math. Z.*, 112, 1969, 234-240
18. Fichera G, Problemi elettrostatici con vincoli unilaterali: il problema de Signorini con ambigue condizioni al contorno, *Mem. Acad. Naz. Lincei*, 7, 1964, 91-140
19. Hartman GJ, Stampacchia G, On some nonlinear elliptic differential equations, *Acta Math.*, 112, 1966,
20. Istrăţescu VI, Some fixed point theorems for convex contraction mappings and mappings with convex diminishing diameters I, *Ann. Mat. Pur. Appl.*, 130, 1982, 89-104
21. Jleli M, Samet B, A generalized metric space and related fixed point theorems, *J. Fixed Point Theory Appl.*, 61, 2015
22. Kirk WA, Reich S, Veeramani P, Proximinal retracts and best proximity pair theorems, *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 24, 2003, 851-862
23. Lucács A, Kajántó S, Fixed point theorems for various types of  $F$ -contractions in complete  $b$ -metric space, *Fixed Point Theory*, 19, 2018, 321-334
24. Panagiotopoulos PD, Nonconvex energy functions, hemivariational inequalities and substationarity principles, *Acta Mech.*, 42, 1983, 160-183

25. Panagiotopoulos PD, Inequality Problems in Mechanics and Applications. Convex and Nonconvex Energy Functions, Birkhäuser, 1985
26. Petric M, Zlatanov B, Best proximity points for  $p$ -cyclic summing iterated contractions, Filomat, 32, 2018, 3275-3287
27. Petric M, Best proximity point theorems for weak cyclic Kannan contractions, Filomat, 25, 2011, 145-154
28. Pitea A, **Stanciu M**, Best proximity for proximal operators on  $b$ -metric spaces, Turkish J. Math., 47, 2023, 1873-1886
29. Sahin H, Aslantas M, Altun I, Best proximity and best periodic points for proximal nonunique contractions, J. Fixed Point Theory Appl., 23, 2021
30. Signorini A, Questioni di elasticità non linearizzata e semilinearizzata, Rendiconti di Matematica e delle Sue Applicazioni, 18(5), 1959, 95-139
31. Stampacchia G, Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes, C.R. Acad. Sci. Paris, 258, 1964, 4413-4416
32. **Stanciu M**, Best proximity for Istrăţescu mappings on generalized metric spaces, Rend. Circ. Mat. Palermo, Ser II. 74, 2025, 139
33. Suzuki T, Kikkawa M, Vetro C, The existence of best proximity points in metric spaces with the property UC, Nonlinear Anal., 71, 2009, 2918-2926
34. Tang GJ, Wang X, Wang ZB, Existence of variational quasi-hemivariational inequalities involving a set-valued operator and a nonlinear term, Optim. Lett., 9, 2015, 75-90
35. Termkaew S, Chaipunya P, Gopal D, Kumam P, A contribution to best proximity point theory and an application to partial differential equation, Optimization, 73, 2024, 2187-2219
36. Zlatanov B, Best proximity points in modular function spaces, Arabian J. Math., 4(3), 2015, 215-227