TEZĂ DE ABILITARE

GEOMETRIC STRUCTURES ON MANIFOLDS. SUBMERSIONS, SUBMANIFOLDS AND APLICATIONS

STRUCTURI GEOMETRICE PE VARIETĂȚI.
SUBMERSII, SUBVARIETĂȚI ȘI APLICAȚII

REZUMAT

Domeniul: MATEMATICĂ

Autor: Prof. Dr. Gabriel-Eduard Vîlcu

București, 2021

Rezumat

Această teză de abilitare prezintă cele mai importante rezultate ale activităţii de cercetate realizată de către autor in domeniul geometriei diferenţiale si aplicaţiilor ei, după susţinerea tezei de doctorat în mai 2006, la Universitatea din Bucureşti. Lucrarea se focusează pe studiul unor structuri geometrice remarcabile pe varietăţi diferenţiabile, subvarietăţi, foliaţii şi submersii (semi-)Riemanniene, precum şi pe investigarea funcţiilor de producţie din perspectiva geometriei diferenţiale, utilizând hipersuprafeţele grafice asociate în mod canonic modelelor de producţie din economie. Unele dintre rezultatele prezentate în teză au fost obţinute de către autor prin cercetare individuală, altele în colaborare cu diverşi cercetători din SUA, Europa şi Asia, majoritatea dintre aceştia fiind experţi recunoscuţi în domeniu.

Lucrarea este structurată în 3 părţi: I: *Rezumat*, II: *Rezultate principale*, III: *Cercetări viitoare*, şi conţine de asemenea o bibliografie cu 368 de titluri. Nucleul acestei teze de abilitare îl constituie următoarele lucrări originale ale autorului, realizate independent sau în colaborare: [3–5, 19, 35, 36, 39, 41, 44, 50, 53, 67–76]. Toate aceste articole au fost realizate în cadrul unor contracte de cercetare, autorul acestei teze fiind fie membru în echipa de cercetare (CEEX 2250/2006-2008, PNII 525/2009-2010, PNII 2805/2012-2016, PNIII 8/2017-2019 - proiecte finanţate de către UEFISCDI, şi RG-1440-142/2020 - proiect finanţat de către Deanship of Scientific Research, King Saud University, Saudi Arabia), fie director de proiect (GAR 181/2007-2008 - grant finanţat de către Academia Română).

Prima parte a tezei oferă o prezentare generală a principalelor puncte ale lucrării, descriind, de asemenea, cadrul general în care se încadrează fiecare dintre subiectele studiate.

În continuare vom expune pe scurt rezultatele principale ale acestei teze, rezultate ce se regăsesc în partea a doua a lucrării. Această parte este structurată în patru secţiuni: 2.1 *Subvarietăţi şi submersii în geometrii de tip paracuaternionic*, 2.2 *Foliaţii pe varietăţi Riemann şi subvarietăţi*, 2.3 *Invarianţi de curbură, inegalităţi optimale şi subvarietăţi ideale în forme spaţiale* şi 2.4 *Interacţiuni între geometria diferenţială şi analiza economică*.

Secţiunea 2.1. este dedicată investigării unor clase speciale de subvarietăţi şi submersii în geometrii de tip cuaternionic. Reamintim că geometria structurilor Riemann, structurilor complexe, structurilor de contact, hipercomplexe, cuaternionice şi Cauchy-

Riemann (pe scurt, CR), se încadrează în teoria generală a G-structurilor, un domeniu de mare interes în geometria diferenţială modernă, în analiza globală şi în fizica matematică. Se ştie că varietăţile cuaternionice corespund reducerii grupului structural la $GL(n, \mathbb{H}) \cdot Sp(1)$, iar din punct de vedere metric cazul cel mai interesant este cel al varietăţilor cuaternionice Kähler. Acestea varietăţi au fost introduse în geometrie pentru prima dată în 1955 de către Berger [11], care a clasificat grupurile ce pot apărea drept grupuri de olonomie pentru varietăţile Riemann ireductibile. O clasă importantă de astfel de grupuri este dată de subgrupurile lui $Sp(n) \cdot Sp(1)$, varietăţile corespunzătoare fiind numite *varietăţi cuaternionice Kähler*. Aceste varietăţi sunt de interes ridicat în fizica teoretică deoarece respectiva olonomie le forţează să fie spaţii Einstein. Pornind de aici, condiţiile din definiţie pot fi relaxate fie în sensul G-structurii, obţinând diferite clase de varietăţi de tip cuaternionic, fie în sensul olonomiei, considerând de exemplu varietăţile hiper-Kähler (acestea având olonomia în $Sp(n+1)$). *Structurile paracuaternionice*, iniţial numite *structuri cuaternionice de speţa a doua*, au fost introduse în geometrie de către P. Libermann [51]. Teoria varietăţilor paracuaternionice este paralelă cu teoria varietăţilor cuaternionice, dar ea utilizează algebra paracuaterninilor, în care doi generatori au pătratul 1, iar un generator are pătratul -1. În consecinţă, aceste varietăţi sunt echipate cu un subfibrat σ de rang 3 in fibratul endomorfismelor fibratului tangent, local generat de două structuri aproape produs şi o structură aproape complexă. Din punct de vedere metric, varietăţile aproape paracuaternionice hermitiene au signatura neutră. Dacă subfibratul σ este paralelizat de către conexiunea Levi-Civita a metricii neutre, atunci se ajunge la conceptul de *varietate paracuaternionică Kähler*. Aceste varietăţi sunt de asemenea Einstein în dimensiune cel puţin 8, deci de asemenea de interes in fizica teoretică.

În § 2.1.2 obţinem diverse proprietăţi de curbură ale spaţiilor twistor şi reflector ale unei varietăţi paracuaternionice Kähler, recuperând în particular un rezultat obţinut de către Alekseevsky şi Cortés [2], dar utilizând o abordare diferită. În continuare, investigăm conceptul de *CR-subvarietate* în context paracuaternionic. Reamintim că noţiunea de CR-subvarietate a fost introdusă în geometria complexă de către Bejancu [8] ca o generalizare a subvarietăţilor total reale şi a celor olomorfe în ambient Kähler. Acest concept a fost ulterior considerat în context cuaternionic de către Barros, Chen şi Urbano în [7]. După aceea au fost elaborate numeroase studii cu privire la geometria CR-subvarietăţilor, fiind extinsă noţiunea şi în alte spaţii; în monografiile [9, 78] putem găsi cele mai importante rezultate referitoare la CR-subvarietăţi. Vom da mai multe exemple de CR-subvarietăţi şi vom stabili rezultate fundamentale cu privire la geometria acestora. În plus, ca o extensie a conceptului de *CR-submersie* introdus de Kobayashi

[49] în context aproape hermitian, vom defini *submersiile CR-paracuaternionice* şi vom obţine câteva proprietăţi ale acestora. În particular, vom discuta proprietăţi de curbură ale fibrelor şi ale spaţiului total al CR-submersiilor paracuaternionice.

În § 2.1.3 studiem geometria unor clase speciale de subvarietăţi în varietăţi cu *3-structuri mixte metrice*. Aceste varietăţi, care reprezintă pandantul în dimensiune impară al varietăţilor paracuaternionice, au apărut în mod natural în studiul hipersuprafeţelor luminoase în varietăţi paracuaternionice hermitiene [37]. Principalele proprietăţi ale acestor varietăţi au fost obţinute de către Caldarella şi Pastore [14]. O metrică adaptată unei structuri mixte este în mod necesar semi-Riemann, iar varietăţile mixt 3-Sasaki sunt Einstein, de aici potenţiala lor importanţă în fizica teoretică. Ne vom concentra mai întâi pe cazul subvarietăţilor *invariante* şi *anti-invariante*, stabilind câteva rezultate cu privire la existenţa acestor subvarietăţi tangente sau normale la câmpurile vectoriale de structură. În particular, vom arăta că o subvarietate invariantă a unei varietăţi înzestrate cu o 3-structură mixtă este obligatoriu fie tangentă, fie normală, la toate cele trei câmpuri vectoriale de structură. În plus, demonstrăm că o subvarietate total ombilicală a unei varietăţi mixt 3-Sasaki, tangentă la câmpurile vectoriale de structură, este invariantă şi total geodezică. Studiem apoi subvarietăţile anti-invariante în ambient mixt 3-cosimplectic şi mixt 3-Sasaki, normale la câmpurile vectoriale de structură, obţinând condiţii necesare şi suficiente pentru trivialitatea conexiunii în fibratul normal. Investigăm de asemenea geometria distribuţiilor care apar în mod natural pe subvarietăţile invariante ale varietăţilor cu 3-structră mixtă metrică, care sunt tangente la câmpurile vectoriale de structură. Obţinem că o subvarietate nedegenerată a unei varietăţi mixt 3-Sasaki, tangentă la câmpurile vectoriale de structură, este total geoedezică dacă şi numai dacă este invariantă. În plus, investigăm geometria subvarietăţilor invariante in varietăţi mixt 3-cosimplectice, normale la câmpurile vectoriale de structură, şi demonstrăm că o astfel de subvarietate admite o structură para-hiper-Kähler. De asemenea, stabilim rezultate fundamentale cu privire la geometria subvarietăţilor *generice* în varietăţi mixt 3-Sasaki şi mixt 3-cosimplectice. Stabilim condiţii de integrabilitate pentru unele distribuţii naturale pe o subvarietate generică şi demonstrăm mai multe rezultate cu privire la geometria foilor. Sunt furnizate numeroase exemple de subvarietăţi invariante, anti-invariante şi generice pentru a ilustra rezultatele obţinute.

În § 2.1.4 investigăm submersiile semi-Riemann de la o varietate înzestrată cu o 3-structură mixtă metrică într-o varietate aproape paracuaternionică hermitiană. Se ştie că studiul submersiilor Riemann a fost iniţiat de către O'Neill [58] şi Gray [33]. Pe de altă parte, conceptul de 3-submersie a fost introdus de Watson [77], ca o submersie Riemann de la o varietate metrică aproape de 3-contact la o varietate aproape cuaternionică, ce comută cu câmpurile tensoriale de tip $(1,1)$. Această noţiune a fost ulterior considerată în context pur (para)cuaternionic în [13, 38]. Submersiile semi-Riemann au fost introduse de O'Neill în cartea sa [59]. Aceste submersii sunt de mare interes în fizică datorită aplicaţiilor lor în teoria Yang-Mills, teoria Kaluza-Klein, în teoriile supergravitaţiei şi supercorzilor (a se vedea Capitolul 8 din [29]). După ce definim conceptul de *3-submersie mixt-paracuaternionică*, obţinem câteva proprietăţi fundamentale cu privire la geometria lor. Studiul se concentrează pe transferul structurilor definite pe spaţiul total al submersiei şi pe geometria fibrelor. Obţinem că o astfel de submersie este aplicaţie armonică, în ipoteza că spaţiul total este mixt 3-cosimplectic sau mixt 3-Sasaki. Deducem de asemenea proprietăţi de curbură ale fibrelor şi bazei unei 3-submersii mixt-paracuaternionice şi furnizăm exemple netriviale de astfel de submersii.

În Secţiunea 2.2 suntem interesaţi în principal de studiul varietăţilor şi subvarietăţilor foliate. Teoria foliaţiilor a fost iniţiată de către Ehresmann şi Reeb [28] la începutul anilor 1940 şi imediat a devenit un subiect de mare interes pentru numeroşi cercetători. În particular, investigarea aspectelor ce ţin de geometria diferenţială a devenit o parte importantă a acestei teorii. În acest sens, Rovenski şi Walczak [63] au studiat mai multe subiecte legate de proprietăţile foliaţiilor care pot fi exprimate în funcţie de forma a doua fundamentală a foilor şi de invarianţii de curbură. Studiul nostru se va concentrea în principal pe legăturile dintre foliaţiile pe o varietate/subvarietate şi structurile geometrice pe care respectiva varietate/subvarietate le poate admite.

În § 2.2.2 investigăm foliaţia total reală a unei CR-subvarietăţi într-o varietate *local conform Kähler* (pe scurt l.c.K.) din punct de vedere al teoriilor subvarietăţilor şi foliaţiilor, rezolvând în particular o problemă de cercetare propusă de Bejancu şi Farran în [10, Capitolul 5]. Reamintim că studiul geometriei l.c.K. a fost iniţiat de către Libermann în [52], iar acesta reprezintă un domeniu dinamic de cercetare chiar şi în zilele noastre. În particular, CR-subvarietăţile în ambient local conform Kähler au fost investigate de numeroşi autori (a se vedea, de exemplu, [6, 25, 26, 55, 56, 60, 61, 64, 65]). Aceste subvarietăţi sunt înzestrate în mod natural cu unele foliaţii canonice, care au fost pentru prima dată studiate de către Chen şi Piccinni [18] (a se vedea de asemenea Capitolul 12 din monografia [27]). Una dintre aceste foliaţii, notată cu $\mathfrak{F}^{\perp}$ şi numită foliaţia *total reală*, este dată de distribuţia total reală implicată în definiţia CR-subvarietăţii şi despre care se ştie că este întotdeauna complet integrabilă, după cum au demonstrat Blair şi Chen [12]. Obţinem condiţii necesare şi suficiente pentru ca o CR-subvarietate într-o varietate l.c.K. să fie riglată în raport cu $\mathfrak{F}^{\perp}$. De asemenea, vom găsi condiţiile în care această foliaţie este Riemanniană.

În § 2.2.3 ne vom concentra pe studiul varietăţilor aproape cosimplectice cu foile

Kähler, prin intermediul unei clase speciale de submersii Riemann, numită *contact-complex*. Este bine cunoscut faptul că dacă $\pi : M \to N$ este o submersie, atunci spaţiul total M este foliat prin preimaginile $\pi^{-1}(y)$, $y \in N$. Mai întâi vom studia aşa-numitele submersii de tip contact-complex, adică submersiile Riemann de la o varietate aproape de contact metricaă (M, ϕ, ξ, η, g) la o varietate aproape hermitiană (N, J, g') care sunt aplicaţii (ϕ, J)-olomorfe [40]. Vom discuta transferul proprietăţilor de curbură Gray de pe spaţiul total al submersiei pe fibre şi pe baza submersiei, obţinând de asemenea *ecuaţia de structură* a acestor submersii, i.e. o formulă explicită care leagă codiferenţialele formelor fundamentale ale spaţiului total şi ale bazei submersiei, de codiferenţiala şi vectorul curbură medie al unei fibre, precum şi de urma unui câmp tensorial asociat în mod natural unei submersii de tip contact-complex. Această ecuaţie ne va permite în final să stabilim armonicitatea 2-formei fundamentale a unei varietăţi aproape cosimplectice cu foile Kähler, o clasă remarcabilă de varietăţi aproape de contact metrice introduse de Olszak în [57].

În § 2.2.4 investigăm interacţiunea dintre *spinorii Killing transversali* şi *operatorul Dirac bazic* în contextul foliaţiilor Riemann. Pentru realizarea unui astfel de studiu în cadrul general al foliaţiilor Riemann, definim spinorii Killing transversali ca o extensie naturală a spinorilor bazici paraleli cu o conexiune modificată asociată operatorului Dirac bazic. Introducem de asemenea într-un mod natural o clasă de *spinori twistor*. Pentru foliaţii Riemann generale, aceste definiţii diferă de cele din [31, 45, 46], dar în cazul particular al foliaţiilor Riemann cu curbura medie bazică armonică, care este contextul cel mai favorabil, definiţia coincide cu cea anterioară [31], iar rezultatele obţinute se dovedesc astfel a fi o generalizare a celor din [45, 46]. Mai mult, în manieră standard [32, 45], cazul absolut (atunci când varietatea este foliată prin puncte) devine o generalizare a cazului varietăţilor Riemanniene închise. După ce introducem principalele obiecte geometrice pe care le utilizăm, deducem rezultatele principale şi evidenţiem caracteristicile specifice ale spinorilor Killing consideraţi. Studiem spinorii twistor în prezenţa unei structuri foliate şi în final trecem în revistă câteva aplicaţii posibile ale rezultatelor obţinute, precum şi unele consideraţii fizice.

În Secţiunea 2.3 obţinem mai multe inegalitaţi optime ce implică invarianţi de curbură fundamentali pentru subvarietăţi în unele forme spaţiale şi, de asemenea, investigăm clasele subvarietăţilor Wintgen şi Casorati *ideale* (în sensul lui B.-Y. Chen [16]). Reamintim că obţinerea de relaţii simple între invarianţii intrinseci şi extrinseci este o problemă fundamentală în teoria subvarietăţilor. În acest context, într-o lucrare fundamentală publicată în 1993, B.-Y. Chen [17] a stabilit o inegalitate optimă pentru o subvarietate într-o formă spaţială reală, inegalitate ce implică principalii invarianţi intrinseci (curbura secţională şi curbura scalară), precum şi principalul invariant extrinsec (pătratul curburii medii). Acesta a fost punctul de plecare al teoriei δ-*invarianţilor*, numiţi şi *invarianţi Chen* sau *ADN-ul Riemannian*, un subiect de mare interes în geometria Riemanniană şi cu multe aplicaţii în diverse domenii ale matematicii (a se vedea [16]). Pe de altă parte, *curbura Casorati* a unui subvarietăţi într-o varietate Riemann, un concept introdus iniţial în 1890 pentru suprafeţele din spaţiul Euclidean 3-dimensional [15], este un invariant extrinsec definit ca pătratul normalizat al lungimii formei a doua fundamentale a subvarietăţii. Această noţiune, preferată de Casorati în faţa curburii Gauss tradiţionale deoarece corespunde mai bine cu intuiţia comună asupra curburii, extinde conceptul de direcţie principală a unei hipersuprafeţe a unei varietăţi Riemann la cazul subvarietăţilor în varietăţi Riemann [34]. În spiritul invarianţilor lui Chen, în [22], S. Decu, S. Haesen şi L. Verstraelen au introdus *curburile* δ-*Casorati normalizate*, ulterior extinse la *curburi* δ-*Casorati generalizate normalizate* în [23], şi au stabilit câteva inegalităţi optime care implică pe de o parte curbura scalară (intrinsecă), iar pe de altă parte curburile δ-Casorati (extrinseci). Reamintim că acele subvarietăţi care realizează egalitate într-o inegalitate de tip Chen în fiecare punct sunt numite *subvarietăţi ideale*. Remarcăm ca denumirea de subvarietate *ideală* este bine motivată (subvarietăţile ideale fiind acele subvarietăţi care primesc cea mai mica tensiune posibilă în fiecare punct din partea spaţiului ambiental [16]), iar clasificarea subvarietăţilor ideale în forme spaţiale este o problemă extrem de provocatoare.

În § 2.3.2 studiem curburile δ-Casorati (generalizate) normalizate ale subvarietăţilor în ambient Kenmotsu. Reamintim că, în 1969, Tano [66] a demonstrat că grupul de automorfisme al unei varietăţi Riemann aproape de contact conexe M de dimensiune $(2n+1)$ are dimensiunea maximă $(n+1)^2$, iar maximul este atins numai în cazul în care M se reduce la unul dintre urmatoarele spaţii: o varietate Sasaki omogenă (sau o ε-deformare a unei astfel de varietăţi) de curbură secţionala ϕ-olomorfă constantă, un produs Riemann global al unei drepte sau al unui cerc cu o formă spaţială complexă, sau un produs warped al spaţiului complex cu dreapta reală. În 1972, Kenmotsu [48] a investigat proprietăţile acestui produs warped şi l-a caracterizat prin ecuaţii tensoriale, dând naştere unuia dintre cele mai noi subdomenii ale geometriei de contact, subdomeniu numit astazi *geometria Kenmotsu*. Deşi neglijate pentru o lungă perioadă de timp, aceste varietăţi au atras atenţia unui numar mare de cercetători în ultimele trei decenii, dovedindu-se a fi un capitol valoros al geometriei de contact (a se vedea [62] şi referinţele de aici). Vom stabili câteva inegalităţi optime pentru curburile δ-Casorati generalizate normalizate ale subvarietăţilor într-o formă spaţială Kenmotsu, în cazul în care aceste subvarietăţi sunt tangente la câmpul vectoial de structură al spaţiului ambient. Mai mult, demonstrăm că egalitatea în toate punctele caracterizează subvarietăţile total geodezice şi furnizăm exemple care ilustrează principalele rezultate.

In § 2.3.3, utilizând metode de optimizare pe subvarietăţi Riemann, stabilim câteva inegalităţi optime îmbunătăţite cu privire la curburile δ-Casorati (generalizate) normalizate ale subvarietăţilor Lagrange n-dimensionale în forme spaţiale complexe. Obţinem un rezultat singular şi neaşteptat: limitele inferioare ale curburilor δ-Casorati normalizate $\delta_C(n-1)$ şi $\widehat{\delta_C}(n-1)$, precum şi ale curburilor δ-Casorati generalizate normalizate $\delta_C(t, n-1)$ şi $\widehat{\delta_C}(t, n-1)$, exprimate în funcţie de dimensiune, curbura secţională olomorfă, curbura scalară normalizată şi pătratul curburii medii a subvarietăţii, sunt diferite, în contrast cu toate rezultatele anterioare obţinute pentru diverse clase de subvarietăţi în diferite spaţii ambientale. De asemenea, investigăm cazul de egalitate al acestor inegalităţi îmbunătăţite, obţinând clasificarea subvarietăţilor Lagrange Casorati ideale în forme spaţiale complexe. Sunt discutate câteva exemple, care arată că valorile constantelor din inegalitaţile obţinute sunt cele mai bune posibile. De asemenea, obţinem unele inegalităţi similare pentru subvarietăţi Legendre în forme spaţiale Sasaki şi clasificăm subvarietăţile Legendre Casorati ideale.

În § 2.3.4 discutăm în context cuaternionic *inegalitatea Wintgen generalizată*, întâlnită în literatura de specialitate şi sub denumirea de *inegalitatea DDVV* sau de *conjectura DDVV*. Această inegalitate celebră a fost conjecturată în [20] şi rezolvată în sens afirmativ în [30, 54]. Scopul nostru este de a extinde inegalitatea DDVV clasică în cazul CR-subvarităţilor în varietăţi cuaternionice Kähler de curbură secţională cuaternionică constantă. Obţinem mai întâi o inegalitate mai generală care implică curbura normală scalară normalizată ρ_N (definită din forma a doua fundamentală) şi apoi deducem o inegalitate de tip DDVV ce implică curbura scalară normală normalizată $\rho^\perp$ (definită din tensorul de curbura normală) pentru CR-subvarietăţi în spaţiul ambient cuaternionic. De asemenea, caracterizăm forma a doua fundamentală a acelor subvarităţi pentru care se obţine cazul de egalitate şi prezentăm un exemplu netrivial de CR-subvarietate care satisface identic cazul de egalitate, i.e. o CR-subvarietate Wintgen ideală.

Secţiunea 2.4 este dedicată studiului modelelor de producţie din economie, utilizând o abordare din perspectiva geometriei diferenţiale. Este bine cunoscut faptul că o funcţie de producţie este un concept fundamental folosit în modelarea unui proces de producţie $\mathcal{P}$. Vom nota cu n numărul de resurse implicate în procesul de producţie ($n \geq 2$), cu $x_1, \ldots, x_n$ factorii de producţie (adică resursele implicate - orice se utilizează în procesul de producţie $\mathcal{P}$, cum ar fi resursele naturale, capitalul, forţa de muncă etc.) şi cu f rezultatul procesului de producţie $\mathcal{P}$. Dacă $\mathbb{R}_+$ reprezintă mulţimea tuturor numerelor reale pozitive, iar $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1, \ldots, x_n > 0\}$, atunci o funcţie $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ cu derivatele parţiale de ordinul întâi nenule, definită prin $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, se numeşte *funcţia de producţie* asociată procesului de producţie $\mathcal{P}$. Legătura dintre funcţiile de producţie şi geometria diferenţială se obţine în mod firesc, deoarece o funcţie de producţie f poate fi identificată cu graficul lui f, şi anume cu hipersuprafaţa L a spaţiului euclidian $(n + 1)$-dimensional definită prin relaţia $L(x_1, ..., x_n) = (x_1, ..., x_n, f(x_1, ..., x_n)),\ (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+$, şi numită *hipersuprafaţa de producţie*. Este clar că dacă $n = 2$, atunci L este o suprafaţă, cunoscută sub numele de *suprafaţă de producţie*. Primele rezultate notabile în analiza economică privind geometria suprafeţelor de producţie au fost obţinute în 1978 de catre Kemp, Khang şi Uekawa [47]. Ei au obţinut condiţii pentru ca suprafaţa de producţie să conţină un număr predefinit de puncte planare. Ulterior, unele condiţii necesare şi suficiente pentru ca o suprafaţă de producţie sa conţină o porţiune plată au fost obţinute de Abe, Okamoto şi Tawada [1] cu instrumentele geometriei analitice. Pe de altă parte, unele condiţii în care funcţia de producţie defineşte o suprafaţă situată pe frontiera unui con, cilindru sau într-un plan au fost deduse de către Inoue [42] folosind tehnici standard de calcul diferenţial. Mai mult, în 1986, Inoue şi Wegge [43] au dedus aceste condiţii într-un mod pur geometric, concentrându-se pe familia de hiperplane care anvelopează frontiera. Folosind instrumentele geometriei diferenţiale, ei au clasificat funcţiile de producţie care sunt guvernate de frontiere riglate, atunci când există trei bunuri şi doi factori de producţie, ilustrând economic rezultatele găsite. În 2011, a fost obţinută o legatură neaşteptată între unele noţiuni fundamentale din teoria funcţiilor de producţie şi din geometria diferenţiala a hipersuprafeţelor în spaţii euclidiene [67, 69], dându-se un impuls în construirea unei teorii geometrico-diferenţiale a modelelor de producţie din economie. Scopul acestei secţiuni este de a prezenta principalele rezultate privind geometria funcţiilor de producţie obţinute după descoperirea acestei legaturi. Ne vom concentra pe principalele modele de producţie care sunt analizate de obicei atât în microeconomie, cât şi în macroeconomie, şi anume modelele de producţie *omogene*, *omotetice*, de tip *quasi-sumă* şi de tip *quasi-produs*. O atenţie specială va fi acordată condiţiilor de curbură, acestea fiind esenţiale în analiza economică, ele aparând inclusiv în celebra teorie a bunăstării elaborată de către Debreu (a se vedea [21], precum şi [24]).

În § 2.4.2 demonstrăm mai multe rezultate de clasificare pentru modele de producţie omogene. Arătăm că o funcţie de producţie omogenă cu un număr arbitrar de factori de producţie defineşte o suprafaţă plană dacă şi numai dacă are revenire constantă la scară sau este o funcţie de producţie multinomială. În particular, obţinem clasificarea funcţiilor de producţie omogene cu doi factori ale căror suprafeţe de producţie sunt desfăşurabile.

În § 2.4.3 investigăm modelele de producţie de tip quasi-sumă şi hipersuprafeţele lor de producţie imersate în spaţiul ambiental euclidian. Obţinem clasificarea funcţiilor de producţie cvasi-sumă cu elasticitate constantă a producţiei în raport cu orice factor de producţie şi cu rata marginală de substituţie proporţională. De asemenea, demonstrăm că dacă o funcţie de producţie quasi-sumă f satisface proprietatea ratei marginale de substituţie proporţională, atunci hipersuprafaţa de producţie corespunzătoare are curbura Gauss-Kronecker nulă dacă şi numai dacă, modulo o translaţie, f se reduce la un tip particular de funcţie Cobb-Douglas generalizată cu revenire constantă la scară. Arătăm de asemenea că hipersuprafaţa de producţie nu poate fi minimală, indiferent de numărul factorilor de producţie, însă ea are curbura secţională nulă dacă şi numai dacă, modulo o translaţie, f se reduce la un tip particular de funcţie Cobb-Douglas generalizată cu revenire crescătoare la scară, în ipoteza că numărul factorilor de producţie este $n > 2$, respectiv cu revenire constantă la scară, dacă numărul factorilor de producţie este $n = 2$.

În § 2.4.4 investigăm modelele de producţie omotetice şi de tip quasi-produs, obţinând diverse rezultate de clasificare pentru aceste modele de producţie în funcţie de geometria hiperuprafeţelor lor grafice asociate. În particular, realizăm o clasificare completă a modelelor de producţie de tip quasi-produs ale căror hipersuprafeţe de producţie au curbura Gauss-Kronecker nulă. De asemenea, clasificăm funcţiile de producţie quasi-produs cu elasticitate constantă a producţiei în raport cu orice factor de producţie, cu rata marginală de substituţie proporţională şi cu proprietatea de elasticitate constantă a substituţiei. Teoremele obţinute sunt aplicate în final pentru a deduce rezultate despre geometria funcţiilor de producţie Spillman-Mitscherlich şi de tip transcendental.

Ultima parte a tezei este dedicată prezentării unor planuri de dezvoltare a activităţii de cercetare.

Bibliography

[1] Abe, K., Okamoto, H., and Tawada, M. (1986). A note on the production possibility frontier with pure public intermediate goods. *Canadian Journal of Economics*, 19(2):351–356.

[2] Alekseevsky, D. and Cortés, V. (2008). The twistor spaces of a para-quaternionic Kähler manifold. *Osaka Journal of Mathematics*, 45(1):215–251.

[3] Alodan, H., Chen, B.-Y., Deshmukh, S., and Vîlcu, G.-E. (2019). On some geometric properties of quasi-product production models. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 474(1):693–711.

[4] Alodan, H., Chen, B.-Y., Deshmukh, S., and Vîlcu, G.-E. (2020). A generalized Wintgen inequality for quaternionic CR-submanifolds. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales - Serie A: Matematicas*, 114(3):14. Id/No 129.

[5] Aquib, M., Lee, J. W., Vîlcu, G.-E., and Yoon, D. W. (2019). Classification of Casorati ideal Lagrangian submanifolds in complex space forms. *Differential Geometry and its Application*, 63:30–49.

[6] Barletta, E. (2002). CR submanifolds of maximal CR dimension in a complex Hopf manifold. *Annals of Global Analysis and Geometry*, 22(2):99–118.

[7] Barros, M., Chen, B.-Y., and Urbano, F. (1981). Quaternion CR-submanifolds of quaternion manifolds. *Kodai Mathematical Journal*, 4(3):399–417.

[8] Bejancu, A. (1978). CR submanifolds of a Kaehler manifold. I. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 69(1):135–142.

[9] Bejancu, A. (1986). Geometry of CR-submanifolds. Mathematics and Its Applications (East European Series), 23. Dordrecht etc.: D. Reidel Publishing Company, a member of the Kluwer Academic Publishers Group. XII.

[10] Bejancu, A. and Farran, H. (2006). *Foliations and geometric structures*. Mathematics and Its Applications. Springer Netherlands.

[11] Berger, M. (1955). Sur les groupes d'holonomie homogènes de variétés à connexion affine et des variétés Riemanniennes. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 83:279–330.

[12] Blair, D. E. and Chen, B.-Y. (1979). On CR-submanifolds of Hermitian manifolds. *Israel Journal of Mathematics*, 34:353–363.

[13] Caldarella, A. V. (2010). On paraquaternionic submersions between paraquaternionic Kähler manifolds. *Acta Applicandae Mathematicae*, 112(1):1–14.

[14] Caldarella, A. V. and Pastore, A. M. (2009). Mixed 3-Sasakian structures and curvature. *Annales Polonici Mathematici*, 96(2):107–125.

[15] Casorati, F. (1890). Mesure de la courbure des surfaces suivant l'idée commune. Ses rapports avec les mesures de courbure Gaussienne et moyenne. *Acta Mathematica*, 14:95–110.

[16] Chen, B. (2011). *Pseudo-Riemannian geometry, δ-invariants and applications*. World Scientific.

[17] Chen, B.-Y. (1993). Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds. *Archiv der Mathematik*, 60(6):568–578.

[18] Chen, B.-Y. and Piccinni, P. (1985). The canonical foliations of a locally conformal Kähler manifold. *Annali di Matematica Pura ed Applicata. Serie Quarta*, 141:289–305.

[19] Chen, B.-Y. and Vîlcu, G.-E. (2013). Geometric classifications of homogeneous production functions. *Applied Mathematics and Computation*, 225:345–351.

[20] De Smet, P. J., Dillen, F., Verstraelen, L., and Vrancken, L. (1999). A pointwise inequality in submanifold theory. *Archivum Mathematicum*, 35(2):115–128.

[21] Debreu, G. (1983). *Mathematical economics: twenty papers*, volume 4. Cambridge University Press, Cambridge.

[22] Decu, S., Haesen, S., and Verstraelen, L. (2007). Optimal inequalities involving Casorati curvatures. *Bulletin of the Transilvania University of Braşov. Series B*, 14(49):85–93.

[23] Decu, S., Haesen, S., and Verstraelen, L. (2008). Optimal inequalities characterising quasi-umbilical submanifolds. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics*, 9(3):79.

[24] Donato, J. (1994). Minimal surfaces in economic theory. In *Geometry in partial differential equations*, pages 68–90. Singapore: World Scientific.

[25] Dragomir, S. (1988). Cauchy-Riemann submanifolds of locally conformal Kähler manifolds. *Geometriae Dedicata*, 28(2):181–197.

[26] Dragomir, S. (1989). Cauchy-Riemann submanifolds of locally conformal Kähler manifolds. II. *Atti del Seminario Matematico e Fisico dell'Università di Modena*, 37(1):1–11.

[27] Dragomir, S. and Ornea, L. (1998). *Locally conformal Kähler geometry*, volume 155. Boston, MA: Birkhäuser.

[28] Ehresmann, C. and Reeb, G. (1944). Sur les champs d'éléments de contact de dimension p completement intégrables dans une variété continuement différentiable V_n. *Comptes Rendus Hebdomadaires des Séances de l'Académie des Sciences, Paris*, 218:955–957.

[29] Falcitelli, M., Pastore, A., and Ianuş, S. (2004). *Riemannian Submersions and Related Topics*. World Scientific.

[30] Ge, J. and Tang, Z. (2008). A proof of the DDVV conjecture and its equality case. *Pacific Journal of Mathematics*, 237(1):87–95.

[31] Ginoux, N. and Habib, G. (2008). Remarks on transversal Killing spinors. *Comptes Rendus Mathematique*, 346(11-12):657–659.

[32] Glazebrook, J. F. and Kamber, F. W. (1991). Transversal Dirac families in Riemannian foliations. *Communications in Mathematical Physics*, 140(2):217–240.

[33] Gray, A. (1967). Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions. *Journal of Mathematics and Mechanics*, 16:715–737.

[34] Haesen, S., Kowalczyk, D., and Verstraelen, L. (2009). On the extrinsic principal directions of Riemannian submanifolds. *Note di Matematica*, 29(2):41–53.

[35] Ianuş, S., Ionescu, A. M., Mocanu, R., and Vîlcu, G.-E. (2011). Riemannian submersions from almost contact metric manifolds. *Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universitat Hamburg*, 81(1):101–114.

[36] Ianuş, S., Marchiafava, S., and Vîlcu, G.-E. (2010). Paraquaternionic CR-submanifolds of paraquaternionic Kähler manifolds and semi-Riemannian submersions. *Central European Journal of Mathematics*, 8(4):735–753.

[37] Ianuş, S., Mazzocco, R., and Vîlcu, G.-E. (2006). Real lightlike hypersurfaces of paraquaternionic Kähler manifolds. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 3(3–4):581–592.

[38] Ianuş, S., Mazzocco, R., and Vîlcu, G. E. (2008). Riemannian submersions from quaternionic manifolds. *Acta Applicandae Mathematicae*, 104(1):83–89.

[39] Ianuş, S., Ornea, L., and Vîlcu, G.-E. (2012). Submanifolds in manifolds with metric mixed 3-structures. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 9(1):105–128.

[40] Ianuş, S. and Pastore, A. (1995). Harmonic maps on contact metric manifolds. *Annales Mathématiques Blaise Pascal*, 2(2):43–53.

[41] Ianuş, S., Visinescu, M., and Vîlcu, G.-E. (2009). Conformal Killing-Yano tensors on manifolds with mixed 3-structures. *Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications (SIGMA)*, 5:022.

[42] Inoue, T. (1984). On the shape of the production possibility frontier with more commodities than primary factors. *International Economic Review*, 25(2):409–424.

[43] Inoue, T. and Wegge, L. L. (1986). On the geometry of the production possibility frontier. *International Economic Review*, 27(3):727–737.

[44] Ionescu, A. M., Slesar, V., Visinescu, M., and Vîlcu, G.-E. (2013). Transversal Killing and twistor spinors associated to the basic Dirac operators. *Reviews in Mathematical Physics*, 25(8):1330011.

[45] Jung, S. D. (2001). The first eigenvalue of the transversal Dirac operator. *Journal of Geometry and Physics*, 39(3):253–264.

[46] Jung, S. D. and Moon, Y. B. (2005). The properties of the transversal Killing spinor and transversal twistor spinor for Riemannian foliations. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 42(6):1169–1186.

[47] Kemp, M. C., Khang, C., and Uekawa, Y. (1978). On the flatness of the transformation surface. *Journal of International Economics*, 8(4):537–542.

[48] Kenmotsu, K. (1972). A class of almost contact Riemannian manifolds. *Tohoku Mathematical Journal*, 24(1):93–103.

[49] Kobayashi, S. (1987). Submersions of CR submanifolds. *Tohoku Mathematical Journal*, 39(1):95–100.

[50] Lee, C. W., Lee, J. W., and Vîlcu, G.-E. (2017). Optimal inequalities for the normalized δ-Casorati curvatures of submanifolds in Kenmotsu space forms. *Advances in Geometry*, 17(3):355–362.

[51] Libermann, P. (1952). Sur les structures presque quaternioniennes de deuxième espéce. *Comptes Rendus Mathématique. Académie des Sciences. Paris*, 234:1030–1032.

[52] Libermann, P. (1955). Sur les structures presque complexes et autres structures infinitésimals régulières. *Bulletin de la Société Mathématique de France*, 83:195–224.

[53] Lone, M. A., Shahid, M. H., and Vîlcu, G.-E. (2019). On Casorati curvatures of submanifolds in pointwise Kenmotsu space forms. *Mathematical Physics Analysis and Geometry*, 22(1):2.

[54] Lu, Z. (2011). Normal scalar curvature conjecture and its applications. *Journal of Functional Analysis*, 261(5):1284–1308.

[55] Matsumoto, K. (1984). On CR-submanifolds of locally conformal Kähler manifolds. *Journal of the Korean Mathematical Society*, 21:49–61.

[56] Munteanu, M. I. (2007). Doubly warped product CR-submanifolds in locally conformal Kähler manifolds. *Monatshefte für Mathematik*, 150(4):333–342.

[57] Olszak, Z. (1987). Almost cosymplectic manifolds with Kählerian leaves. *Tensor*, 46:117–124.

[58] O'Neill, B. (1966). The fundamental equations of a submersion. *Michigan Mathematical Journal*, 13:459–469.

[59] O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, volume 103 of *Pure and Applied Mathematics*. Academic Press.

[60] Ornea, L. (1986). On CR submanifolds of locally conformal Kaehler manifolds. *Demonstratio Mathematica*, 19:863–869.

[61] Papaghiuc, N. (1993). Some remarks on CR-submanifolds of a locally conformal Kaehler manifold with parallel Lee form. *Publicationes Mathematicae*, 43(3-4):337–341.

[62] Pitiş, G. (2007). *Geometry of Kenmotsu manifolds*. Publishing House of "Transilvania" University of Braşov.

[63] Rovenski, V. and Walczak, P. (2011). *Topics in extrinsic geometry of codimension-one foliations.* Berlin: Springer.

[64] Şahin, B. and Güneş, R. (2002). CR-submanifolds of a locally conformal Kähler manifold and almost contact structure. *Mathematics Journal of Toyama University*, 25:13–23.

[65] Sharma, R. and Duggal, K. L. (1987). Totally umbilical CR-submanifolds of locally conformal Kaehler manifolds. *Mathematical Chronicle*, 16:79–83.

[66] Tanno, S. (1969). The automorphism groups of almost contact Riemannian manifolds. *Tohoku Mathematical Journal*, 21:21–38.

[67] Vîlcu, A. D. and Vîlcu, G.-E. (2011). On some geometric properties of the generalized CES production functions. *Applied Mathematics and Computation*, 218(1):124–129.

[68] Vîlcu, A.-D. and Vîlcu, G.-E. (2015). Some characterizations of the quasi-sum production models with proportional marginal rate of substitution. *Comptes Rendus Mathematique*, 353(12):1129–1133.

[69] Vîlcu, G.-E. (2011). A geometric perspective on the generalized Cobb-Douglas production functions. *Applied Mathematics Letters*, 24(5):777–783.

[70] Vîlcu, G. E. (2012). Ruled CR-submanifolds of locally conformal Kähler manifolds. *Journal of Geometry and Physics*, 62(6):1366–1372.

[71] Vîlcu, G.-E. (2013a). Canonical foliations on paraquaternionic Cauchy-Riemann submanifolds. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 399(2):551–558.

[72] Vîlcu, G.-E. (2013b). Mixed paraquaternionic 3-submersions. *Indagationes Mathematicae*, 24(2):474–488.

[73] Vîlcu, G.-E. (2016). On generic submanifolds of manifolds endowed with metric mixed 3-structures. *Communications in Contemporary Mathematics*, 18(6):1550081.

[74] Vîlcu, G.-E. (2018). An optimal inequality for Lagrangian submanifolds in complex space forms involving Casorati curvature. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 465(2):1209–1222.

[75] Vîlcu, G.-E. (2020). Horizontally conformal submersions from CR-submanifolds of locally conformal Kähler manifolds. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 17(1):13. Id/No 26.

[76] Visinescu, M. and Vîlcu, G.-E. (2012). Hidden symmetries of euclideanised Kerr-NUT-(A)dS metrics in certain scaling limits. *SIGMA. Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications*, 8:15. Id/No 058.

[77] Watson, B. (1984). Almost contact metric 3-submersions. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences*, 7(4):667–688.

[78] Yano, K. and Kon, M. (1983). *CR submanifolds of Kaehlerian and Sasakian manifolds*, volume 30. Birkhäuser/Springer, Basel.