Some links between geometric theories of higher order tangent spaces, foliations & algebroids and their applications

Legături între teoriile geometrice ale spaţiilor tangente de ordin superior, ale foliaţiilor şi algebroizilor şi aplicaţii ale lor

Paul Popescu

Contents

Part I

REZUMATUL TEZEI DE ABILITARE

Rezultatele incluse în teză sunt împărţite în trei părţi principale intitulate: *Hamiltonieni afini în geometria de ordin superior*, *Contribuţii la Teoria Geometrică a Foliaţiilor* şi *Module ancorate, structuri aproape Lie şi algebroizi.* Aceste părţi au la bază probleme distincte, dar legate de diferite subiecte comune. Acestea sunt principalele domenii pe care m-am concentrat în cercetarea ştiinţică, în special în ultimele două decenii.

Lagrangeni şi hamiltonieni definiţi pe spaţii tangente de ordin superior sunt consideraţi de Ostrogradski în secolul al nouăsprezecelea. Forme moderne ale acestor idei sunt considerate în monografiile bine-cunoscute ale lui V. Arnold, dar şi în cele trei monografii ale lui R. Miron, despre aceşti lagrangieni şi hamiltonieni. Noi definim un hamiltonian afin; hamiltonianul considerat în monografiile lui Miron (denumit de noi hamiltonian vectorial) este legat de un hamiltonian afin printr-o secţiune afină. Studiul hamiltonienilor afini se justifică în special pe faptul că ei sunt obiecte globale (nu ca in cazul monografiei lui Arnold), iar în cazul hiperregular ei sunt obiecte duale de lagrangienilor definiţi pe fibrate afine, prin intermediul aplicţiilor naturale Legendre, ceea ce nu este cazul hamiltonienilor vectoriali. Sunt studiate probleme variaţionale pentru hamiltonienii afini şi lagrangii de ordin $k \geq 2$, legaţi de o ecuaţie Hamilton. Rezultatul principal este o teoremă de tip Ostrogradski, în cazul hiperregular: ecuaţia Hamilton a unui hamiltonian afin h este echivalentă cu ecuaţia Euler-Lagrange a lagrangianului sau dual L. Studiul condiţiilor Zermelo arată că nu există astfel de condiţii pentru un hamiltonian afin. Unele exemple netriviale sunt considerate.

Lagrangianii de ordinul doi sunt consideraţi de mulţi autori. Lagrangianii de ordinul doi, care depind afin de acceleraţie, sunt implicaţi în unele probleme speciale şi au fost studiaţi în legătură cu anumite aspecte mecanice. Potrivit lui O. Krupkova, în acest caz pot fi luate în considerare anumite condiţii de regularitate speciale. Lagrangieni de ordinul al treilea, care depind afin de derivatele din ordinul al treilea, pot fi un model pentru o dezvoltare viitoare a cazului de ordinul doi. Noi studiem câteva aspecte dinamice provenind dintr-o formă tangentă, adică o formă diferenţială dependentă de timp de pe fibratul tangent. Acţiunea pe curbe a unei forme tangente este naturală asociată cu cea a unei lagrangian de ordinul doi, afin în acceleraţii, în timp ce asocierea inversă nu este unică. Se ia în considerare o relaţie de echivalenţă a formei tangente, compatibilă cu Lagrangieni echivalenţi gauge. Exprimăm ecuaţia Euler-Lagrange ale lagrangianului dat ca o derivată Lagrange de ordinul doi a formei tangente, având în vedere formele tangente controlate şi de ordin superior. Sunt exprimate şi formele Hamiltoniane ale dinamicii generate, obţinând extinderea unor formule de cuantizare date de Lukierski, Stichel şi Zakrzewski. Folosind semi-spray-uri, sunt exprimate soluţiile locale ale ecuaţiilor E-L în unele cazuri speciale.

Următoarea parte este intitulată *Contribuţii la teoria geometrică a foliaţiilor*. Foliaţiile Riemanniene sunt definite de B. Reinhart în 1959. Aceste foliaţii particulare sunt strâns legate de geometria diferenţială, iar proprietăţile lor de bază sunt studiate în multe lucrări din ultima jumătate de secol. Noi propunem conexiuni între foliaţii şi lagrangieni, pentru a recunoaşte foliaţiile riemanniene.

Urmând ideile lui E. Ghys din Apendixul E al monografiei lui Molino despre foliaţiile riemanniene, Miernowski şi Mozgawa au pus întrebarea dacă o foliaţie Finsler este o foliaţie rimanniană. Dăm aici o soluţie la această problemă, cunoscută sub denumirea de *conjectura lui Ghys*. Mai mult, demonstrăm (într-un şir de lucrări publicate în reviste reputate) mai mult: existenţa unuia dintre următoarele obiecte este echivalentă cu faptul că o foliaţie $\mathcal{F}$ este riemanniană:

– Un lagrangian admisibil şi fibrat adaptat (bundle–like).

– Un lagrangian transvers, hiperregular, pozitiv şi admisibil.

– Un cociclu lagrangian foliat, hiperregular, pozitiv şi admisibil.

– Un lagrangian hiperregular, pozitiv şi admisibil, care are $T\mathcal{F}^{\perp_L} \subset TM$ ca o subvarietate geodezică.

– Foliaţia liftată $\mathcal{F}^r$ pe fibratul r-transvers al jeturilor este riemanniană pentru un $r \geq 1$.

– Foliaţia $\mathcal{F}_0^r$ de pe varietatea (slashed) $\mathcal{J}_0^r$ este riemanniană şi vertical exactă pentru un $r \geq 1$.

– Există un lagrangian transversal admisibil pozitiv pe varietatea (slashed) $\mathcal{J}_0^r E$, r-transversă al jeturilor unui fibrat foliat $E \to M$, pentru un $r \geq 1$.

– Foliaţia liftată $\mathcal{F}^r$ pe fibratul r-transvers al jeturilor $\nu^r \mathcal{F}$ este riemanniană pentru un $r \geq 1$.

– Foliaţia liftată $\mathcal{F}_0^r$ pe fibratul r-transvers al jeturilor (slashed) $\nu_*^r\mathcal{F}$ este riemanniană şi vertical exactă pentru un $r \geq 1$.

– Există un lagrangian transversal admisibil şi pozitiv pe $\nu_*^r\mathcal{F}$, pentru un $r \geq 1$.

Geometrizarea sistemelor neolonome este o problemă istorică remarcabilă în mecanică şi geometrie (vezi, de exemplu, lucrările şi monografiile lui de Leon). În general, constrângerile cele mai frecvent utilizate şi studiate în mecanica neolonomă sunt cele liniare şi afine. Dar constrângerile neliniare sunt de asemenea implicate în mecanica neolonomă. În teză vom prezenta câteva sisteme de ecuaţii rezultate, în prezenţa unor constrângeri neolonome neliniare de tip Chetaev, în prezernţa unui lagrangian şi a unei foliaţii adaptate. Folosind anumite condiţii naturale de regularitate, este dată o formă simplă a acestor ecuaţii. În cazurile particulare de constrângeri lineare şi afine, se recuperează ecuaţiile clasice în formele cunoscute anterior, de exemplu, cele din monografia lui Bloch. Cazul constrângerilor dependente de timp este, de asemenea, luat în considerare.

Sunt studiate exemple de constrângeri lineare, afine, constrângeri neliniare independente de timp şi dependente de timp, precum şi dinamica dată de lagrangii adecvaţi. Toate exemplele se bazează pe cele clasice, cum ar fi cele date de maşina lui Appell, dar şi o formă nouă a dinamicii particulei cu contrângeri riemanniene (riemannian flow).

Următoarea parte este intitulat *Module ancorate, Structuri aproape Lie şi Algebroizi.* Vor fi două exemple în care se dau aplicaţii non-triviale care implică ancore şi algebroizi, fără construcţii evidente.

În primul capitol, definim şi construim nişte *functori ∞-Lie*, din două categorii de module ancorate care admit conexiuni liniare în categoriile corespunzătoare de pseudoalgebre Lie; clasa izomorfismului pseudoalgebrei Lie nu depinde de conexiunea liniară sau de croşetul corespondent şi are şi proprietăţi universale. În cazul particular al unui modul, algebra ∞-Lie este izomorfă cu algebra Lie liberă a modulului, în sensul lui Bourbaki. Un alt caz particular este acela al structurilor aproape Lie, atunci când modulele sunt secţiunile unui fibrat vectorial ancorat, peste algebra comutativă a funcţiilor reale de pe bază.

Următorul capitol are ca studiu algebroizii, care sunt generalizări ale algebroizilor Lie, atunci când Jacobiatorul nu este necesar null. Se dă un exemplu relativ simplu de algebroid anti-simetric, pentru care nu este posibil un croşet de algebroid Lie sau fibrat Courant pentru ancora dată, însă o extensie naturală a fibratului şi a ancorei permite un croşet de algebroid Lie. Sunt construite unele coomologii şi clase caracteristice ale unui algebroid anti-simetric. Demonstrăm că de fapt clasele caracteristice ale unui algebroid anti-simetric sunt imagini reciproce ale claselor caracteristice al bazei, ca în cazul algebroizilor Lie.