UNIVERSITATEA ”POLITEHNICA” DIN BUCUREŞTI
FACULTATEA DE ŞTIINŢE APLICATE
DEPARTAMENTUL DE MATEMATICĂ - INFORMATICĂ

Rezumat Teză de Doctorat

Perturbări stochastice ale unor structuri sub-riemanniene

Autor: Teodor Ţurcanu

Conducător de doctorat:

Prof. Emerit Dr. Constantin Udrişte

Bucureşti, 2017

Cuvinte cheie: *Geometrie sub-riemanniană, varietăţi Grushin, curbe admisibile, procese stochastice admisibile, distribuţii perturbate stochastic, procese Wiener, conectivitate stochastică, geometrie Ţiţeica, energie Dirichlet.*

O distribuţie definită pe o varietate diferenţiabilă induce o anumită geometrie precum şi un anumit tip de dinamică. Geometria este dată de metrica sub-riemanniană corespunzătoare distribuţiei, iar dinamica indusă este specificată de curbele admisibile (orizontale).

În prezenta Teză de Doctorat este investigată geometria unor structuri sub-riemanniene de rang variabil, cunoscute sub numele de varietăţi de tip Grushin, precum şi problema conectivităţii (accesibilităţii) prin procese stocastice admisibile induse de perturbările stochastice ale structurilor date.

În plus, unele metode şi idei elaborate sunt aplicate studiului geometriei soluţiilor unor ecuaţii cu derivate parţiale precum şi a energiei Dirichlet asociate unui tor arbitrar imersat în spaţiul hiperbolic.

Materialul prezentei Teze este structurat în cinci Capitole, o Introducere şi o Bibliografie.

În Capitolul 1, cu titlul **Geodesics on Grushin-type manifolds**, este investigată geometria indusă de distribuţia

$$\mathcal{G} = \{\partial_{x^1}, x^1\partial_{x^2}, x^1x^2\partial_{x^3}, \ldots, x^1x^2\ldots x^{n-1}\partial_{x^n}\},$$

pe spaţiul real $n-$dimensional $\mathbb{R}^n$. Metrica sub-riemanniană $g = (g_{ij})$, ataşată distribuţiei $\mathcal{G}$, este dată prin $g_{11} = 1$, $g_{ij} = \delta_{ij}\left(x^1\ldots x^{i-1}\right)^{-2}$, $i = 2, \ldots, n$, şi este definită înafara hiperplanelor $\{x^i = 0\}$. Varietatea de tip Grushin în cazul dat este tripletul $\mathbb{G}_n = (\mathbb{R}^n, \mathcal{G}, g)$. Un caz particular îl reprezintă planul Grushin asociat distribuţiei $\{\partial_x, x\partial_y\}$. Un studiu detaliat al geometriei planului Grushin, cu accent pe geodezice, a fost realizat de către Călin *et al.* [17] şi Chang *et al.* [24]. Unele generalizări au fost prezentate de către Chang *et al.* [25, 26]. Pe baza informaţiei de natură geometrică, autorii au construit nucleul de căldură asociat operatorului Grushin

$$\Delta = \frac{1}{2}\left(\partial_x^2 + x^2\partial_y^2\right),$$

introdus de către V. V. Grushin [50, 51].

Metodele şi ideile folosite în lucările menţionate îşi au originea în lucrări anterioare ale autorilor precum Beals, Gaveau şi Greiner [7, 8, 46], ce se ocupă de probleme similare pentru varietăţi Heisenberg. Merită menţionată aici şi legătura dintre varietăţile Heisenberg şi varietăţile de tip Grushin [4].

Contribuţiile originale din Capitolul 1 sunt următoarele: Teorema 1.4.3 descrie cazurile în care există o singură geodezică ce uneşte două puncte arbitrare date. Teorema 1.4.4 stabileşte lungimea geodezicelor folosită la calculul distanţei Carnot-Carathéodory-Vrănceanu. Rezultatul principal al capitolului îl reprezintă Teorema 1.5.4, care conţine o clasificare completă a geodezicelor sub-riemanniene din $\mathbb{G}_n$. Mai precis, sunt stabilite condiţiile în care numărul geodezicelor între două puncte arbitrare este unu, infinit numărabil şi, respectiv, finit. Teorema 1.6.1 stabileşte numărul punctelor de intersecţie ale unei geodezice arbitrare cu sub-varietăţile canonice, iar Teorema 1.6.3 determină numărul geodezicelor ce unesc originea cu un punct arbitrar. Lema 1.5.3 şi Lema 1.6.2, respectiv, reprezintă rezultate tehnice importante.

Rezultatele originale, în cazul tridimensional sunt publicate în [89] (T. Ţurcanu, *On sub-Riemannian geodesics associated to a Grushin operator*, Appl. Anal., ID: 1268685 (IF 0.815)), alăturându-se în mod natural rezultatelor obţinute anterior de către Beals *et al.* [8], Calin *et al.* [17, 19], Chang *et al.* [24], Chang *et al.* [25, 26].

Geodezicele sunt obţinute prin proiecţia curbelor bicaracteristice asociate funcţiei hamiltoniene

$$H(x,p) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} g^{ij}p_i p_j = \frac{1}{2}\left(p_1^2 + \left(x^1\right)^2 p_2^2 + \cdots + \left(x^1 \dots x^{n-1}\right)^2 p_n^2\right),$$

definite pe fibratul cotangent $T^*\mathbb{R}^n$. Soluţiile sistemului hamiltonian canonic descriu ecuaţiile geodezicelor, acestea fiind

$$\begin{aligned}
x^n(t) &= \frac{1}{4}\left(\frac{C_{n-1}}{C_n}\right)^2 \left[2\varphi_{n-1}(t) - \sin\left(2\varphi_{n-1}(t)\right) - \left(2\varphi_{n-1}^0 - \sin\left(2\varphi_{n-1}^0\right)\right)\right],\\
\varphi_i(t) &= \frac{1}{4}\frac{C_{i+1}C_{i-1}^2}{C_i^3}\left[2\varphi_{i-1}(t) - \sin\left(2\varphi_{i-1}(t)\right) - \left(2\varphi_{i-1}^0 - \sin\left(2\varphi_{i-1}^0\right)\right)\right] + \varphi_i^0,\\
x^i(t) &= \frac{C_i}{C_{i+1}}\sin\left(\varphi_i(t)\right),\\
p_i(t) &= C_i\cos\left(\varphi_i(t)\right), \quad i = 2,\dots,n-1,
\end{aligned}$$

unde $x^1(t) = C_1\sin\left(C_2 t + \alpha_1\right)$, $\varphi_1(t) = C_2 t + \alpha_1$, şi C_i, φ_i^0 sunt constante.

Teoremă (1.4.3)**.** *Dacă $C_2 = 0$ şi $x_0^k \neq 0$, $k = 2,\dots,n$, atunci $x_0^k = x_1^k$ şi există o unică geodezică*

$$x : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}^n, \quad x(t) = \left(\left(x_1^1 - x_0^1\right)t + x_0^1,\ x_0^2,\dots,x_0^n\right),$$

ce uneşte punctele $P(x_0)$ şi $Q(x_1)$, de lungime

$$\ell\left[x(t)\right] = |x_1^1 - x_0^1|.$$

Teoremă (1.4.4)**.** *Cu notaţiile şi definiţiile de mai sus, fie* $C_2 > 0$*. Atunci, lungimea unei geodezice* $x(t)$ *este*

$$\ell\,[x(t)] = C_2|C_1|.$$

Teoremă (1.5.4)**.** *Fie* $P(x_0)$ *şi* $Q(x_1)$ *două puncte în* $\mathbb{G}_n$*. Numărul geodezicelor ce le uneşte este*

i) unu, dacă $x_0^i = x_1^i \neq 0$, $\forall i = 2, \ldots, n$*;*

ii) infinit numărabil, dacă există $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ *astfel încât* $x_0^i = x_1^i = 0$*;*

iii) finit, în rest.

Teoremă (1.6.1)**.** *Fie* $P(x_0, y_0, z_0)$ *şi* $Q(x_1, y_1, z_1)$ *două puncte în* $\mathbb{G}_3$ *şi fie* $x(t)$ *o geodezică ce le uneşte. Atunci, numărul* n*, al punctelor de intersecţie a geodezicei date*

i) cu planu yOz*, este*

$$n = \begin{cases} \left[\dfrac{C_2}{\pi}\right] + 1, & \textit{for } \alpha = 0 \\ \\ \left[\dfrac{C_2 + \alpha}{\pi}\right] - \left[\dfrac{\alpha}{\pi}\right], & \textit{for } \alpha \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}; \end{cases}$$

ii) cu planul xOz*, este*

$$n = \begin{cases} \left[\dfrac{\varphi_1}{\pi}\right] + 1, & \textit{for } \varphi_0 = 0 \\ \\ \left[\dfrac{\varphi_1}{\pi}\right] - \left[\dfrac{\varphi_0}{\pi}\right], & \textit{for } \varphi \in (-\pi, \pi) \setminus \{0\}; \end{cases}$$

iii) cu axa Oz*, este* $|\Gamma_\psi \cap \mathbb{T}|$*, unde, respectiv,*

$$\Gamma_\psi = \{(t, \psi(t)) \in \mathbb{R}^2 |\ \psi(t) = \frac{1}{2} p_3 C_1^2 t + \frac{1}{4} p_3 C_1^2 \sin 2\alpha + \varphi_0\},$$

$$\mathbb{T} = \{(l\pi, m\pi) \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq l \leq \left[\frac{C_2 + \alpha}{\pi}\right],\ 0 \leq m \leq \left[\frac{\varphi_1}{\pi}\right]\}.$$

Teoremă (1.6.3)**.** *Fie* P *în origine iar* $Q(x_1, y_1, z_1)$ *un punct astfel încât* $x_1 y_1 \neq 0$ *şi fie* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *soluţiile ecuaţiei* $\mu(\varphi) = \dfrac{2z_1}{y_1^2}$*. Atunci,*

i) numărul n *este dat de*

$$n = 2\left[\frac{2z_1}{\pi y_1^2}\right] + sgn\left(\frac{2z_1}{y_1^2} - \pi\left[\frac{2z_1}{\pi y_1^2}\right] - \arctan\left(\frac{2z_1}{y_1^2}\right)\right),$$

ii) iar numărul geodezicelor dintre P şi Q este $N = m_1 + \cdots + m_n$, unde

$$m_i \;= 2\left[\frac{2\varphi_i y_1}{\pi x_1^2 \sin\varphi_i}\right] + sgn\left(\frac{2\varphi_i y_1}{x_1^2 \sin\varphi_i} - \pi\left[\frac{2\varphi_i y_1}{\pi x_1^2 \sin\varphi_i}\right]\right.$$

$$\left. - \arctan\left(\frac{2\varphi_i y_1}{x_1^2 \sin\varphi_i}\right)\right), \; i = 1, \ldots, n.$$

În Capitolul 2, intitulat **Stochastic connectivity on a perturbed Grushin distribution**, este studiată probema conectivităţii stochastice pentru distribuţia $\{\partial_x, x^k\partial_y\}$, $k \in \mathbb{N}^*$ perturbată stochastic. Problema conectivităţii stochastice pe varietăţi sub-riemanniene a fost formulată recent de către Călin, Udrişte şi Ţevy [21, 22], obţinând primele rezultate în acest sens pentru planul Grushin dotat cu distribuţia $\{\partial_x, x\partial_y\}$.

Rezultatul principal din Capitolul 2 este Teorema 2.3.2 care stabileşte proprietatea conectivităţii stochastice a planului Gruhin prin procese stochastice admisiblie asociate distribuţiei $\{\partial_x, x^k\partial_y\}$, $k \in \mathbb{N}^*$. Teorema 2.4.1 extinde rezultatul principal pentru cazul în care ambele capete sunt specificate probabilistic.

Rezultatele originale din Capitolul 2 sunt publicate în [86] (T. Ţurcanu, C. Udrişte, *Stochastic perturbation and connectivity based on Grushin distribution*, U. Politeh. Bucharest Sci. Bull. Ser. A, 79, 1 (2017), 3-10 (IF 0.365)), fiind o extindere naturală a rezultatelor obţinute anterior de către Calin, Udrişte şi Ţevy [21].

Prin perturbare stochastică se are în vedere înlocuirea curbelor orizontale, ce corespund distribuţiilor sub-riemanniene specificate, prin procese stochastice corespunzătoare. Mai precis, fiind dată o distribuţie $\mathcal{D}$, generată local de către o familie de câmpuri vectoriale $X_1, X_2, \ldots, X_k$, curbele orizontale corespunzătoare $x : [0, \infty) \to \mathbb{R}^n$, sunt soluţii ale sistemului de EDO

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^{n} u_i(t) X_i(x(t)). \tag{1}$$

Foarte des, în special în cadrul aplicaţiilor, este necesar un model care ţine cont şi de efecte perturbatoare. Un astfel de model îl reprezintă analogul stochastic al sistemului (1) dat de sistemul controlat de ecuaţii diferenţiale stochastice (EDS)

$$dx_t = \left(\sum_{i=1}^{n} u_i(t) X_i(x(t))\right) dt + \sigma dW_t, \tag{2}$$

unde W_t este un proces Wiener $n-$dimensional iar σ este o matrice de coeficienţi pozitivi. Aceasta este o formă particulară a sistemelor de tip Itô–Pfaff

$$dx_s = b(s, x_s, u_s)ds + \sigma(s, x_s, u_s)dW_s, \tag{3}$$

ce descriu probleme de dinamică stochastică controlată ([34, 35, 37, 72]).

Fie $\mathcal{U}_1$ *mulţimea controalelor deterministe*, *i.e.*, controale $u(s,\omega) = u(s)$ ce nu depind de ω, şi fie $\mathcal{U}_2$ mulţimea *controalelor Markov*, *i.e.*, funcţii $u(s,\omega) = u_0(s, x_s(\omega))$, astfel încât $u_0 : \mathbb{R}^{n+1} \to U \subset \mathbb{R}^k$. Un proces stochastic $c_s = (x(s), y(s))$, care satisface sistemul de EDS

$$\begin{cases} dx(s) = u_1(s)ds + \sigma_1 dW_s^1 \\ dy(s) = u_2(s)x^k(s)ds + \sigma_2 dW_s^2, \end{cases}$$

cu $u_1, u_2 \in \mathcal{U}_1 \cup \mathcal{U}_2$, se va numi *proces stochastic admisibil*.

Formularea problemei conectivităţii în context stochastic necesită unele ajusări suplimentare. Fiind dat un proces stochastic X_t, ce porneşte dintr-un punct iniţial P, este clar că probabilitatea evenimentului $X_t = Q$ pentru un punct specificat Q, este aproape nulă. Astfel, considerăm un disc arbitrar de mic centrat în Q.

Teoremă (2.3.2)**.** *Fie $P = (x_P, y_P)$ şi $Q = (x_Q, y_Q)$ două puncte în $\mathbb{R}^2$ şi fie $D(Q,r)$ discul euclidian de rază r, centrat în Q. Atunci, pentru orice $\varepsilon \in (0,1)$ şi orice $r > 0$, există $t < \infty$ şi un proces stochastic admisibil c_s, ce satisface condiţiile*

$$(x(0), y(0)) = (x_P, y_P), \quad (\mathbb{E}[x(t)], \mathbb{E}[y(t)]) = (x_Q, y_Q),$$

astfel încât

$$\mathbb{P}(c_t \in D(Q,r)) \geq 1 - \varepsilon.$$

Teoremă (2.4.1)**.** *Fie P şi Q două puncte arbitrare în $\mathbb{R}^2$. Atunci, pentru orice $r_1, r_2 > 0$ şi pentru orice $0 < \varepsilon_1, \varepsilon_2 < 1$ există t_1 şi t_2, respectiv, şi un proces stochastic admisibil c_s, ce satisface condiţiile*

$$(\mathbb{E}[x(t_1)], \mathbb{E}[y(t_1)]) = (x_P, y_P), \quad (\mathbb{E}[x(t_2)], \mathbb{E}[y(t_2)]) = (x_Q, y_Q),$$

astfel încât

$$\mathbb{P}(c_{t_1} \in D(P, r_1)) \geq 1 - \varepsilon_1, \quad \mathbb{P}(c_{t_2} \in D(Q, r_2)) \geq 1 - \varepsilon_2.$$

În Capitolul 3, intitulat **Stochastic accessibility along a perturbed posynomial distribution**, este continuat studiul problemei conectivităţii stochastice pe structuri sub-riemanniene. De data aceasta, pentru o clasă mult mai largă de distribuţii, mai exact, distribuţii pozinomiale.

Rezultatul principal din Capitolul 3 este Teorema 3.3.2, reprezentând un rezultat analog cu cel din Teorema 2.3.2 din Capitolul 2.

Rezultatele originale din Capitolul 3 sunt publicate în [90] (T. Ţurcanu, C. Udrişte, *Stochastic accessibility on Grushin-type manifolds*, Statist. Probab. Lett., 125 (2017), 196-201 (IF 0.506)). Menţionăm că în [90] spaţiul de bază este $\mathbb{R}^n$, în timp ce distribuţia are exponenţi întregi.

În Capitolul 3 spaţiul de bază este $\mathbb{R}^n_+ := \{x = (x_1, \ldots, x_n) |\, x_i > 0,\ i = 1, \ldots, n\}$, iar distribuţia pozinomială $\mathcal{P}$ este generată local de câmpurile vectoriale

$$\begin{array}{lll} X_1 = & \mu^1(x)\partial_{x_1} := & \partial_{x_1} \\ X_2 = & \mu^2(x)\partial_{x_2} := & x_1^{k_1}\partial_{x_2} \\ X_3 = & \mu^3(x)\partial_{x_3} := & x_1^{k_1}x_2^{k_2}\partial_{x_3} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ X_n = & \mu^n(x)\partial_{x_n} := & x_1^{k_1}x_2^{k_2}\ldots x_{n-1}^{k_{n-1}}\partial_{x_n}. \end{array}$$

Similar cu Capitolul 2, folosind un proces Wiener $n-$dimensional $(W_s^1, \ldots, W_s^n)$, Obţinem un sistem Pfaff perturbat stochastic. Procesele stochastice admisibile sunt definite corespunzător.

Teoremă (3.3.2)**.** *Fie două puncte arbitrare în $\mathbb{R}^n_+$, notate cu $P = (x_1^P, \ldots, x_n^P)$ şi $Q = (x_1^Q, \ldots, x_n^Q)$ respectiv, şi fie $D(Q, r)$ discul euclidian de rază r centrat în Q. Atunci, pentru orice $\varepsilon \in (0, 1)$ fixat şi pentru orice $r > 0$, există un timp $t < \infty$ şi un proces stochastic admisibil x_s, astfel încât*

$$\mathbb{P}\left(x_t \in D(Q, r)\right) \geq 1 - \varepsilon,$$

şi care satisface condiţiile de frontieră

$$x_0 = P, \quad \mathbb{E}\left[x_t\right] = Q.$$

În Capitolul 4, intitulat **The geometry of solutions for quartic interaction PDE**, ne ocupaăm de studiul legăturii dintre Geometria Diferenţială şi EDP-uri dintr-o altă perspectivă, considerând şi unele formulări stochastice ale problemelor abordate. De data aceasta, ingredientele principale sunt reprezentate de către o varietate semi-riemanniană şi un d'Alembertian. Sunt studiate proprietăţile geometrice ale graficelor funcţiilor ce reprezintă soluţiile ecuaţiei cu derivate partiale, definite pe spaţiul Minkowski 4−dimensional:

$$\Box u := u_{11} - u_{22} - u_{33} - u_{44} = \mu^2 u - \lambda u^3,$$

unde μ este *termenul de masă*, λ este *constanta de cuplare* (strict pozitivă), iar $\Box$ este operatorul lui d' Alembert (cu $c = 1$). Ecuaţia dată apare în contextul teoriei câmpului quantic, ţeprezintă o variantă modificată a faimoasei ecuaţii Klein-Gordon, ale cărei soluţii sunt câmpuri cu interacţiune cuartică [76].

Graficele soluţiilor sunt în acelaşi timp varietăţi integrale asociate distribuţiei $\mathcal{D}$, generate local de către câmpurile

$$\begin{aligned} Y_1 &= (1,0,0,0,k_1 Y(u))\,, \quad Y_2 = (0,1,0,0,k_2 Y(u))\,, \\ Y_3 &= (0,0,1,0,k_3 Y(u))\,, \quad Y_4 = (0,0,0,1,k_4 Y(u))\,, \end{aligned} \tag{4}$$

unde k_1, k_2, k_3, k_4 sunt nişte constante iar $Y(u)$ este o funţie de u.

De asemenea, este studiată şi geometria unei alte clase de soluţii, mai precis, soluţii ale unui anume sistem de EDP care genereaza ecuaţia (4) în sensul celor mai mici pătrate ([95]-[105]).

Rezultatele principale din Capitolul 4 sunt Teorema 4.3.1 şi Teorema 4.4.3, în care se arată că în ambele cazuri tensorul de curbură Ţiţeica este identic nul pe graficele soluţiilor considerate. De asemenea, Teorema 4.4.2 stabileşte faptul că ecuaţia (4) poate fi generată în sensul celor mai mici pătrate. La finalul capitolului, introducem noţiunea de geodezice stochastice, obţinând sistemul de EDS care le descrie.

Contribuţiile originale din Capitolul 4 sunt publicate în [87] (T. Ţurcanu, C. Udrişte, *Tzitzeica geometry of soliton solutions for quartic interaction PDE*, Balkan J. Geom. Appl., 21, 1 (2016), 103-112).

Teoremă (4.3.1)**.** *Fie S o varietate integrală asociată distribuţiei $\mathcal{D}$. Atunci*

i) componentele conexiunii Ţiţeica sunt

$$\Lambda^{\gamma}_{\alpha\beta} = h^{\gamma\sigma} Y^5_\sigma \frac{\partial Y^5_\alpha}{\partial u} Y^5_\beta = (h^{\gamma\sigma} k_\sigma)\, k_\alpha k_\beta\, (Y)^2 \, \frac{\partial Y}{\partial u},$$

ii) tensorul de curbură asociat perechii (S, Λ) este identic nul.

Următorul rezultat arată că ecuaţia (4) poate fi generată în sensul celor mai mici pătrate.

Teoremă (4.4.2)**.** *i) Ecuaţia (4) este o prelungire Euler-Lagrange a sistemului*

$$\begin{cases} \dfrac{\partial x^i}{\partial t^\alpha} = \delta^i_\alpha = X^i_\alpha(x(t)), \quad i, \alpha = 1,2,3,4, \\ \\ \dfrac{\partial x^5}{\partial t^\alpha} = X^5_\alpha(x(t)). \end{cases}$$

ii) Există o infinitate de structuri geometrice şi o infinitate de câmpuri vectoriale care realizează prelungirea dată.

În Capitolul 5, intitulat **Dirichlet frame energy on a torus immersed in $\mathbb{H}^n$** este studiată problema mărginirii energiei Dirichlet asociată reperelor mobile pe un tor imersat în spaţiul Hiperbolic. De asemenea, introducem şi o versiune stochastică a energiei Dirichlet.

Rezultatul principal din Capitolul 5 este Teorema 5.2.1, împreună cu Corolarul 5.2.2, care arată că energia Dirichlet, este mărginită inferior de $2\pi^2$. Rezultate similare au fost obţinute de către Mondino *et al.* pentru imersii în $\mathbb{R}^n$ [64] şi de către Topping [83] pentru imersii în $n-$sferă.

Contribuţiile originale sunt publicate în [88] (T. Ţurcanu, C. Udrişte, *A lower bound for the Dirichlet energy of moving frames on a torus immersed in* $\mathbb{H}^n$, Balkan J. Geom. Appl., 20, 2 (2015), 84-91).

Ingredientele principale sunt: un tor abstract $\mathbb{T}$, o imersie diferenţiabilă de clasă C^∞, $\varphi : \mathbb{T} \hookrightarrow \mathbb{H}^n, n \geq 3$ şi un reper mobil definit pe $\varphi(\mathbb{T})$, ce reprezintă o pereche de secţiuni în fibratul tangent $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)$.

Metrica bull-back, notată cu $h := \varphi^* g_{\mathbb{H}^n}$, este indusă în mod natural de către imersia φ. Energia Dirichlet asociată perechii $(\varphi, \mathbf{x})$, este funcţionala

$$\mathcal{D}(\varphi, \mathbf{x}) = \frac{1}{4} \int_{\mathbb{T}} |d\mathbf{x}|^2 d\mu_h, \tag{5}$$

unde d este diferenţiala reperului.

La fel ca şi în cazul imersiilor în $\mathbb{R}^n$ [64], problema se reduce la repere canonice ataşate imersiilor de clasă C^∞ ale unui tor plat.

Teoremă (5.2.1)**.** *Fie* $\varphi : \Sigma \hookrightarrow \mathbb{H}^n, n \geq 3$ *o imersie netedă conformă şi fie* $\mathbf{x}$ *reperul mobil canonic ataşat. Atunci, are loc următoarea inegalitate*

$$\mathcal{D}(\varphi, \mathbf{x}) = \frac{1}{4} \int_{\Sigma} |d\mathbf{x}|^2 d\mu_h > \pi^2 \left(b + \frac{1}{b} \right) \frac{1}{1 + \cot^2 \theta \cos^2 \theta}. \tag{6}$$

Ca şi corolar, obţinem că energia Dirichlet este mărginită inferior de $2\pi^2$.

Bibliografie

[1] A. A. Agrachev, U. Boscain, G. Charlot, R. Ghezzi, and M. Sigalotti, *Two-dimensional almost-Riemannian structures with tangency points*, Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linaire, 27(2010), 793-807.

[2] A. A. Agrachev, U. Boscain, M. Sigalotti, *A Gauss-Bonnet-like formula on twodimensional almost-Riemannian manifolds*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 20,4 (2008), 801-822.

[3] N. Arcozzi, A. Baldi, *From Grushin to Heisenberg via an isoperimetric problem*, J. Math. Anal. Appl., 340 (2008), 165-174.

[4] N. Arcozzi, R. Rochberg, E. T. Sawyer B. D. Wick, *The Dirichlet space: a survey*, New York J. Math. 17 (2011), 45-86.

[5] T. Ariyoshi, M. Hino, *Small-time asymptotic estimates in local Dirichlet spaces*, Electron. J. Probab., 10 (2005), 1236-1259.

[6] V. Balan, C. Udrişte, I. Ţevy, *Sub-Riemannian geometry and optimal control on Lorenz-induced distributions*, Politehn. Univ. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys., 77,2 (2015), 29-42.

[7] R. Beals, B. Gaveau, P. C. Greiner, *On a geometric formula for the fundamental solutions of subelliptic Laplacians*, Math. Nachr., 181 (1996), 81-163.

[8] R. Beals, B. Gaveau, P. C. Greiner, *Hamilton-Jacobi theory and the heat kernel on the Heisenberg groups*, J. Math. Pures. Appl., 79,7 (2000), 633-689.

[9] W. Beckner, *On the Grushin operator and hyperbolic symmetry*, Proc. Amer. Math. Soc., 129,4 (2001), 1233-1246.

[10] A. Bellaïche, J. J. Risler (eds.), *Sub-Riemannian Geometry*, Progress in Mathematics 144, Birkhäuser, Basel, 1996.

[11] A. Bellaïche, *The tangent space in sub-Riemannian geometry.* In: A. Bellaïche, J. J. Risler (eds.), *Sub-Riemannian Geometry*, Progress in Mathematics 144, Birkhäuser, Basel, 1996.

[12] K. Borsuk, *Sur la courbure totale des courbes fermées*, Ann. Soc. Pol. Math., 20 (1948), 251-265.

[13] U. Boscain, D. Prandi, M. Seri, *Spectral analysis and the Aharonov-Bohm effect on certain almost-Riemannian manifolds*, arXiv:1406.6578v2 (2015).

[14] S. Boyd, S. J. Kim, L. Vanderberghe, A. Hassibi, *A tutorial on geometric programming*, Optim. Eng., 8 (2007), 67-127.

[15] O. Calin, *The Missing Direction and Differential Geometry on Heisenberg Manifolds*, PhD Thesis, 2000.

[16] O. Calin, D. C. Chang, *Sub-Riemannian Geometry: General Theory and Exemples*, EMIA 126, Cambridge University Press, Cambridge, 2009.

[17] O. Calin, D. C. Chang, P. C. Greiner, Y. Kannai, *On the geometry induced by a Grushin operator.* In: *Complex Analysis and Dynamical Systems* II, Contemporary Math., 382 (2005), 89-111.

[18] O. Calin, D. C. Chang, *SubRiemannian geometry: a variational approach*, J. Diff. Geom., 80, 1 (2008), 23-43.

[19] O. Calin, D. C. Chang, *The geometry on a step 3 Grushin operator*, Appl. Anal., 84, 2 (2005), 111-129.

[20] O. Calin, C. Udrişte, *Geometric Modeling in Probability and Statistics*, Springer, 2014.

[21] O. Calin, C. Udrişte, I. Ţevy, *A stochastic variant of Chow-Rashevski Theorem on the Grushin distribution*, Balkan J. Geom. Appl., 19, 1 (2014), 1-12.

[22] O. Calin, C. Udrişte, I. Ţevy, *Stochastic Sub-Riemannian geodesics on Grushin distribution*, Balkan J. Geom. Appl., 19, 2 (2014), 37-49.

[23] E. Cartan, *Les Systèmes Extèrieurs et leurs Applications Gèometriquè*, Hermann, 1945.

[24] C. H. Chang, D. C. Chang, B. Gaveau, P. Greiner, H. P. Lee, *Geometric analysis on a step* 2 *Grushin operator*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica (New Series), 4, 2 (2009), 119-188.

[25] D. C. Chang, Y. Li, *SubRiemannian geodesics in the Grushin plane*, J. Geom. Anal. 22 (2012), 800-826.

[26] D. C. Chang, Y. Li, *Heat kernel asymptotic expansions for the Heisenberg sub-Laplacian and the Grushin operator*, Proceedings A. Roy. Soc. London, 471 (2015), ID:20140943.

[27] I. Chavel, *Eigenvalues is Riemannian Geometry*, Academic press, 1984.

[28] S. S. Chern, *Moving frames*, Astérisque, hors série, Soc. Math. de France, (1985), 67-77.

[29] S. S. Chern, *An elementary proof of the existence of isothermal parameters on a surface*, Proc. Amer. Math. Soc., 6, 5 (1955), 771-782.

[30] W. L. Chow, *Über Systeme von linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung*, Math. Ann., 177 (1939), 98-105.

[31] K. L. Chung, *Lectures from Markov Precesses to Brownian Motion*, Grund. Math. Wiss. 249, Springer-Verlag, New York, 1982.

[32] V. C. Damian, *Multitime stochastic optimal control*, PhD Thesis, Politehnica University, Bucharest, 2011.

[33] G. Darboux, *Leçons sur la Théorie Générale des Surfaces*, Chelsea, New York, 1972.

[34] V. Dragan, T. Morozan, *The linear quadratic optimization problems for a class of linear stochastic systems with multiplicative white noise and Markovian jumping*, IEEE Trans. Aut. Control, 49, 1 (2004), 665-675.

[35] V. Dragan, T. Morozan, *Stochastic observability and Applications*, IMA Journal of Math. Control and Information, 21, 2004, 323-344.

[36] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, AMS, Providence, RI, 1998.

[37] L. C. Evans, *An Introduction to Stochastic Differential Equations V 1.2*, UC Berkeley.

[38] C. Fefferman, A. Sanchez-Calle, *Fundamental solutions for second order subelliptic operators*, Ann. Math. 124, 2 (1986), 247-272.

[39] W. Fenchel, *Über Krüummung und Windung geschlossener Raumskurven*, Math. Ann., 101 (1929), 238-252.

[40] M. Fels, P. J. Olver, *Moving coframes I, A practical algorithm*, Acta Appl. Math., 51 (1998), 161-213.

[41] M. Fels, P. J. Olver,, Moving coframes II, Regularization and theoretical foundations, Acta Appl. Math., 55 (1999), 127-208.

[42] M. Fels, P. J. Olver,, Moving frames and moving coframes, preprint, University of Minnesota, 1997.

[43] B. Franchi, E. Lanconelli, *Une métrique associée à une classe d'opérateurs elliptiques dégénérés*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino, Special Issue (1984), 105-114.

[44] I. M. Gelfand, S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, Prentice-Hall, New Jersey, 1963.

[45] B. Gaveau, P. Greiner, *On geodesics in subRiemannian geometry*, Bull. Inst. Math. Acad. Sinica (New Series), 1 (2006), 79-209.

[46] B. Gaveau, *Principle de moindre action, propagation de la chaleur et estimeems sous elliptiques sur certains groups nilpotents*, Acta Math. 139 (1977), 95-153.

[47] N. Goodman, *Nilpotent Lie groups*, Springer Lecture Notes in Mathematics, Vol 562, 1976.

[48] M. Gromow, *Carnot-Carathéodory Spaces Seen from Within.* In: Bellaïche, A., Risler, J.J. (eds.): Sub-Riemannian Geometry. Progress in Mathematics 144, Birkhäuser, Basel, 1996.

[49] M. Gromov, *Groups of polynomial growth and expanding maps*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math., 53 (1981), 53-73.

[50] V. V. Grushin, *On a class of hypoelliptic operators*, Math. Sb. 83(125) (1970), 456-473.

[51] V. V. Grushin, *A certain class of elliptic pseudodifferential operators that are degenerate on a submanifold*, Math. Sb. 84(126) (1971), 163-195.

[52] M. Hino, J. Ramirez, *Small-time Gaussian behavior of symmetric diffusion semigroups*, Ann. Probab., 31 (2003), 1254-1295.

[53] L. Hörmander, *Hypoelliptic second order differential operators*, Acta. Math., 119 (1967), 147-171.

[54] U. Hamenstädt, *Some regularity theorems for Camot-Carathéodory metrics*, J. Diff. Geom., 32 (1990), 819-850.

[55] F. Hélein, *Harmonic maps, conservation laws and moving frames*, Cambridge Tracts in Math. 150, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.

[56] E. P. Hsu, *Stochastic Analysis on Manifolds*, AMS, Providence, RI, 2002.

[57] E. P. Hsu, *Brownian motion and Dirichlet problems at infinity*, Ann. Prob., 31, 3 (2003), 1305-1319.

[58] T. A. Ivey, J. M. Landsberg, *Cartan for Beginners: Differential Geometry via Moving Frames and Exterior Differential Systems*, Grad. Studies in Math., Vol. 61, AMS, Providence, RI, 2003.

[59] J. Jost, *Compact Riemann Surfaces. An introduction to contemporary mathematics*, Third ed., Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 2006.

[60] A. E. Kogoj, S. Sonner, *Hardy type inequalities for $\Delta_\lambda-$Laplacians*, arXiv:1403.0215v2.

[61] P. Li, S. T. Yau, *A new conformal invariant and its aplications to the Willmore conjecture and the first eigenvalue of compact surfaces*, Invent. Math., 69, 2 (1982), 269-291.

[62] W. Liu, H. Sussmann, *Shortest paths for sub-Riemannian metrics on rank two distributions*, Mem. Am. Math. Soc., 118 (1995), 1-104.

[63] G. Metivier, *Fonction spectrale et valeurs propres d'une classe d'operateurs non elliptiques*, Comm. Partial Differential Equations, 1 (1976), 467-519.

[64] A. Mondino, T. Rivière, *A frame energy for immersed tori and applications to regular homotopy classes*, arXiv:1307.6884v1.

[65] J. Mitchell, *On Carnot-Carathéodory metrics*, J. of Diff. Geom., 21 (1985), 35-45.

[66] R. Montgomery, *A Tour of Subriemannian Geometries, Their Geodesics and Applications*, AMS, Providence, RI, 2002.

[67] R. Montgomery, *Abnormal minimizers*, SIAM J. Control Optim., 32, 6 (1994), 1605-1620.

[68] R. Montgomery, *A survey of singular curves in sub-Riemannian geometry*, J. Dyn. Control Syst., 1, 1 (1995), 45-90.

[69] R. Monti, D. Morbidelli, *The isoperimetric inequality in the Grushin plane*, J. Geom. Anal. 14, 2 (2004), 355-368.

[70] S. Montiel, A. Ros, *Minimal immersions of surfaces by the first eigenfunctions and conformal area*, Invent. Math., 83 (1986), 153-166.

[71] M. Neagu, *Riemann-Lagrange Geometry on* $1-$*Jet Spaces*, Matrix Rom, Bucharest, 2005.

[72] B. Øksendal, *Stochastic Differential Equations*, 6-th ed., Springer, 2003.

[73] P. Pansu, *Metriques de Carnot-Carathéodory et quasi-isometries des espaces symetriques de rang un*, Ann. Math., 129, 2 (1989), 1-60.

[74] P. Pansu, *Croissance des boules et des géodésiques fermées dans les nilvariétes*, Ergodic Theory Dynam. Systems, 3, 3 (1983), 415-445.

[75] A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, *Nonlinear Partial Differential Equations*, CRC Press, 2003.

[76] P. Ramond, *Field Theory: A Modern Primer*, Second Ed., Westview Press, 2001.

[77] M. Romney, *Conformal Grushin spaces*, Conformal geometry and Dynamics, 20 (2016), 97-115.

[78] P. K. Rashevskii, *About connecting two points of complete nonholonomic space by admissible curve*, Uch. Zapiski Ped. Instit. K. Liebknechta, 2 (1938), 83-94.

[79] L. P. Rothschild, E. M. Stein, *Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups*, Acta Math., 137 (1976), 247-320.

[80] G. Stefani et al. (Eds.), *Geometric Control Theory and Sub-Riemannian geometry*, Springer INdAM Series 5, 2014.

[81] R. S. Strichartz, *Sub-Riemannian geometry*, J. Diff. Geom., 24 (1986), 221-263.

[82] D. W. Strook, *An introduction to the Analysis of Paths on a Riemannian Manifold*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 74, AMS, Providence, RI, 2000.

[83] P. Topping, *Towards the Willmore conjecture*, Calc. Var. and PDE, 11 (2000), 361-393.

[84] Y. Tsukamoto, *On the total absolute curvature of closed curves in manifolds of negative curvature*, Math. Ann., 210 (1974), 313-319.

[85] G. Tzitzeica, *Oeuvres*, Vol. I, Bucharest, 1941.

[86] T. Ţurcanu, C. Udrişte, *Stochastic perturbation and connectivity based on Grushin distribution*, U. Politeh. Bucharest Sci. Bull. Ser. A Appl. Math. Phys., 79, 1 (2017), 3-10.

[87] T. Ţurcanu, C. Udrişte, *Tzitzeica geometry of soliton solutions for quartic interaction PDE*, Balkan J. Geom. Appl., 21, 1 (2016), 103-112.

[88] T. Ţurcanu, C. Udrişte, *A lower bound for the Dirichlet energy of moving frames on a torus immersed in* $\mathbb{H}^n$, Balkan J. Geom. Appl., 20, 2 (2015), 84-91.

[89] T. Ţurcanu, *On subRiemannian geodesics associated to a Grushin operator*, Appl. Anal., ID: 1268685.

[90] T. Ţurcanu, C. Udrişte, *Stochastic accessibility on Grushin-type manifolds*, Statist. Probab. Lett., Statist. Probab. Lett., 125 (2017), 196-201.

[91] C. Udrişte, *Convex Functions and Optimization Methods on Riemannian Manifolds*, Springer, 1994.

[92] C. Udrişte, V. Damian, *Simplified single-time stochastic maximum principle*, Balkan J. Geom. Appl., 16, 2 (2011), 155-173.

[93] C. Udrişte, I. Ţevy, *Sturm-Liouville operator controlled by sectional curvature on Riemannian manifolds*, Balkan J. Geom. Appl., 17, 2 (2012), 129-140.

[94] C. Udrişte, *Minimal submanifolds and harmonic maps through multitime maximum principle*, Balkan J. Geom. Appl., 18, 2 (2013), 69-82.

[95] C. Udrişte, *Nonclassical Lagrangian dynamics and Potential Maps*, WSEAS Trans. Math., 7, 1 (2008), 12-18.

[96] C. Udrişte, V. Arsinte, A. Bejenaru, *Harmonicity and submanifold maps*, J. Adv. Math. Stud. 5, 1 (2012), 48-58.

[97] C. Udrişte, *Tzitzeica theory - opportunity for reflection in Mathematics*, Balkan J. Geom. Appl., 10, 1 (2005), 110-120.

[98] C. Udrişte, M. Ferrara, D. Opriş, *Economic Geometric Dynamics*, Geometry Balkan Press, Bucharest, 2004.

[99] C. Udrişte, *Geometric dynamics*, Southeast Asian Bull. Math., 24, 1 (2000), 313-322.

[100] C. Udrişte, M. Neagu, *Geometric interpretation of solutions of certain PDEs*, Balkan J. Geom. Appl., 4, 1 (1999), 138-145.

[101] C. Udrişte, *Geometric Dynamics*, Kluwer Academic Publishers, 2000.

[102] C. Udrişte, *Dynamics induced by second-order objects.* In *Global Analysis, Differential Geometry, Lie Algebras* (G. Tsagas (Ed.)), Geometry Balkan Press, 2000.

[103] C. Udrişte, M. Postolache, *Atlas of Magnetic Geometric Dynamics*, Monographs and Textbooks 3, Geometry Balkan Press, Bucharest, 2001.

[104] C. Udrişte, *Solutions of ODEs and PDEs as potential maps using first order Lagrangians*, Balkan J. Geom. Appl., 6, 1 (2001), 93-108.

[105] C. Udrişte, *Tools of geometric dynamics*, Bull. Inst. Geodyn., Romanian Academy, 14, 4 (2003), 1-26.

[106] C. Udrişte, *Comparing variants of single-time stochastic maximum principle*, Recent Advances on Computational Science and Applications, Proceedings of the 4-th International Conference on Applied and Computational Mathematics, Seoul, South Korea, September 5-7, 2015.

[107] S. R. S. Varadhan, *On the behaviour of the fundamental solution of the heat equation with variable coefficients*, Comm. Pure Appl. Math., 20 (1967), 431-455.

[108] A. M. Vershik, V. Y. Gershkovich, *Nonholonomic dynamical systems, geometry of distributions and variational problems*, in Dynamical Systems VII, V. I. Arnold, S. P. Novikov (Eds), Encyclopaedia of Mathematical Sciences, vol. 16, Springer, 1994.

[109] G. Vranceanu, *Sur les spaces non holonomes*, C. R. Acad. Sci. Paris, 183, 1 (1926), 852-854.

[110] G. Vranceanu, *Leçons de Géométrie Différentielle*, Rotativa, Bucharest, 1947.

[111] G. Vranceanu, *Lectures of Differential Geometry* (in Romanian), EDP, Bucharest, vol. I (1962), vol.II (1964).

[112] J. L. Weiner, *On a problem of Chen, Willmore, et al.*, Indiana Univ. Math. J., 27, 1 (1978), 19-35.

[113] T. J. Willmore, *Riemannian Geometry*, Oxford Science Publications, Oxford University Press, Oxford, 1993.

[114] J. M. Wu, *Geometry of Grushin spaces*, Illinois J. Math, 59 (2015), 21-41.

[115] J. M. Wu, *Bilipschitz embedding of Grushin plane in* $\mathbb{R}^3$, Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (5), to appear

[116] K. Yano, *Generalizations of the connection of Tzitzeica*, Kodai. Math. Sem. Rep., 21 (1969), 167-174.