

UNIVERSITATEA POLITEHNICA DIN BUCUREȘTI
FACULTATEA DE ȘTIINȚE APLICATE

TEZĂ DE ABILITARE

**OPERATORI DE LOCALIZARE, OPERATORI
PSEUDO DIFERENȚIALI
ȘI TRANSFORMĂRI STOCKWELL**

Autor: Conf. Dr. VIOREL CATANĂ
Domeniul de abilitare: Matematică

BUCUREȘTI
2018

Rezumat Teză de Abilitare

Această teză de abilitare intitulată "Operatori de localizare, operatori pseudo-diferențiali și transformări Stockwell" conține trei categorii de teme corespunzând celor trei arii tematice cuprinse în titlu. Aceste teme își au originea în lucrările originale publicate de autor în jurnale de matematică cu un nivel calitativ bun, ca de exemplu : Integral Equations and Operator Theory, Applicable Analysis, Complex Variables and Elliptic Equations, Mathematical Modelling of Natural Phenomena, Journal of Pseudo-Differential Operators and Applications sau în cărți și proceedinguri ale unor conferințe, publicate în edituri renumite ca de exemplu: Birkhäuser și AMS. Aceste trei categorii de teme sunt prezentate în primele trei capitole ale tezei de abilitare

Prima categorie de teme se referă la operatorii de localizare și conține subiecte referitoare la proprietatea Schatten-von Neumann și inegalități ale normei operatorilor de localizare 2-wavelet (undină), operatori de localizare 2-wavelet considerați în cadrul spațiilor omogene și produse de operatori 2-wavelet multiplicatori. Această categorie de teme se regăsește în Capitolul I. Subiectele din acest prim grup de teme care se referă la operatori de localizare 2-wavelet sunt utile în analiza timp-frecvență, Acești operatori de localizare 2-wavelet sunt filtre mai eficiente în analiza semnalelor decât filtrele convenționale.

Al doilea grup de teme se referă la operatori pseudo-diferențiali. Diferite clase de operatori pseudo-diferențiali ca de exemplu: operatori pseudo-diferențiali M -hipoeliptici pe $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 < p < \infty$, operatori pseudo-diferențiali SG-hipoeliptici pe $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 < p < \infty$, operatori pseudo-diferențiali multiliniari pe $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 < p < \infty$, operatori pseudo-diferențiali multiliniari pe $\mathbf{Z}^n$ sau $\mathbf{T}^n$ -torul n -dimensional sau operatori pseudo-diferențiali de tip Weyl sunt studiați în Capitolul II al tezei de abilitare.

A treia colecție de teme se referă la transformări Stockwell și conține subiecte de tipul: operatori de localizare 2-wavelet asociați cu transformările β -Stockwell, rezultate de tip Abelian și Tauberian pentru transformările Stockwell 1-dimensionale modificate și versiuni multiliniare pentru transformările Stockwell. Trebuie menționat faptul că în Capitolul III sunt grupate subiectele amintite anterior referitoare la transformările Stockwell.

Primul grup de teme este conectat cu a treia colecție de teme prin cadrul generat de reprezentările ireductibile și de pătrat integrabile ale unui grup local compact Hausdorff G pe un spațiu Hilbert X , cadru în care operatorii de localizare 2-wavelet sunt construiți în Secțiunea 1 din Capitolul III.

A doua colecție de teme este conectată cu al treilea grup de teme prin intermediul Secțiunii 3 din Capitolul III, în care se precizează o legătură fundamentală dintre Transformările Stockwell multiliniare și operatorii pseudo-diferențiali multiliniari.

Studiul operatorilor de localizare pe un grup local compact Hausdorff G este motivat de operatorii Daubechies, care de fapt sunt operatori de localizare pe grupul Weyl-Heisenberg $(WH)^n$ înzestrat cu reprezentările Schrödinger ale lui $(WH)^n$ pe $L^2(\mathbf{R}^n)$.

Un operator liniar $D_{F,\varphi} : L^2(\mathbf{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbf{R}^n)$ definit prin

$$(D_{F,\varphi}f, g)_{L^2(\mathbf{R}^n)} = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} F(q, p)(f, \varphi_{q,p})_{L^2(\mathbf{R}^n)}(\varphi_{q,p}, g)_{L^2(\mathbf{R}^n)} dq dp,$$

pentru tot $f, g \in L^2(\mathbf{R}^n)$ unde

$$\varphi_{q,p}(x) = e^{ip \cdot x} \varphi(x - q), \quad x \in \mathbf{R}^n, \quad q, p \in \mathbf{R}^n,$$

$F \in L^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$ și $\varphi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ cu $\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = 1$ este de obicei numit un operator Daubechies asociat simbolului F și ondulinei (wavelet) φ . Această clasă de operatori liniari este studiată în contextul analizei semnalelor. Se poate arata că dacă se consideră un simbol $F \in L^1(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n) \cup L^\infty(\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n)$, o ondulină (wavelet) $\varphi \in L^2(\mathbf{R}^n)$ astfel încât $\|\varphi\|_{L^2(\mathbf{R}^n)} = 1$ și reprezentarea Schrödinger $\pi : (WH)^n \rightarrow U(L^2(\mathbf{R}^n))$ a grupului Weyl-Heisenberg $(WH)^n$ pe spațiul Hilbert $L^2(\mathbf{R}^n)$, definită prin

$$\pi(q, p, t) = e^{i(px - qp + t)} f(x - q), \quad x \in \mathbf{R}^n,$$

$$(q, p, t) \in (WH)^n = \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \times [0, 2\pi], \quad f \in L^2(\mathbf{R}^n),$$

atunci operatorul de localizare $L_{F^\#, \varphi} : L^2(\mathbf{R}^n) \rightarrow L^2(\mathbf{R}^n)$ definit prin

$$\begin{aligned} (L_{F^\#, \varphi}f, g)_{L^2(\mathbf{R}^n)} &= \frac{1}{c_\varphi} \int_0^{2\pi} \int_{\mathbf{R}^n} \int_{\mathbf{R}^n} F^\#(q, p, t)(f, \pi(q, p, t)\varphi)_{L^2(\mathbf{R}^n)} \times \\ &\quad \times (\pi(q, p, t)\varphi, g)_{L^2(\mathbf{R}^n)} dq dp dt, \end{aligned}$$

pentru toate funcțiile f, g în $L^2(\mathbf{R}^n)$, este același ca și operatorul Daubechies, unde $F^\#(q, p, t) = F(q, p)$, $(q, p, t) \in (WH)^n$ și

$$c_\varphi = \int_{(WH)^n} |(\varphi, \pi(q, p, t)\varphi)_{L^2(\mathbf{R}^n)}|^2 dq dp dt$$

este constanta ondulina (wavelet) asociata ondulinei admisibile (wavelet) φ .

În Capitolul I, Secțiunile 1 – 3 ale tezei noastre de abilitare sunt prezentate rezultate referitoare la studiul operatorilor de localizare 2-wavelet, care extind rezultate similare obținute de Wong și de fostul său doctorand Zhang, de la cazul 1-wavelet la cazul 2-wavelet. Astfel rezultatele principale din Secțiunea 1 a acestui capitol se referă la o estimare bilaterală a normei Hilbert-Schmidt pentru operatorii de localizare 2-wavelet și la precizarea unei formule a normei Hilbert-Schmidt, în raport cu o funcție $F^{\varphi,\psi} : G \rightarrow \mathbf{C}$ definită prin

$$F^{\varphi,\psi}(g) = (L_{F,\varphi,\psi}\pi(g)\varphi, L_{F,\varphi,\psi}\pi(g)\psi), \quad g \in G$$

și constanta 2-wavelet $c_{\varphi,\psi}$, unde $L_{F,\varphi,\psi} : X \rightarrow X$ este operatorul de localizare 2-wavelet asociat unei reprezentări ireductibile și de pătrat integrabilă $\pi : G \rightarrow U(X)$, a unui grup local compact Hausdorff G pe un spațiu Hilbert complex separabil X (vezi Teoremele 3.3, 3.4 din Subsecțiunea 1.3).

Trebuie remarcat faptul că marginea inferioară a normei Hilbert-Schmidt este optimă, iar marginea superioară a aceleiași norme obținută folosind interpolarea este mai bună decât cea obținută fără utilizarea teoriei interpolării.

În Secțiunea 2 a Capitolului I sunt introduși și studiați operatorii de localizare 2-wavelet în cadrul spațiilor omogene. Se demonstrează că acești operatori de localizare sunt în clasa "trace" S_1 și o formulă pentru "urma" acestora este precizată (vezi Teoremele 2.1, 2.2 din Subsecțiunea 2.2). În continuare se arată că operatorii de localizare 2-wavelet în contextul infinit dimensional al reprezentărilor unitare de pătrat integrabile a grupurilor locale compacte Hausdorff, operatorii generali Daubechies și multiplicatorii 2-wavelet pot fi priviți ca operatori de localizare 2-wavelet pe spații omogene corespunzătoare (vezi Exemplele 3.1-3.3 din cadrul Subsecțiunii 2.3). Astfel se obține o prezentare unitară a acestor trei clase de operatori liniari. La finalul Secțiunii 2 (vezi Subsecțiunea 2.4) este demonstrată afirmația că operatorii de localizare 2-wavelet pe $\mathbf{R}$, considerat ca spațiu omogen, sub acțiunea grupului afin U , sunt 2-wavelet multiplicatori. Două formule pentru produsul operatorilor 2-wavelet multiplicatori sunt precizate în Subsecțiunea 3.2 a Secțiunii 3 din Capitolul I (vezi Teoremele 2.3, 2.4). În continuare o formulă pentru "urma" acestui produs ca și o estimare a marginii superioare a normei în clasa "trace" a acestui tip de produs sunt precizate (vezi Teorema 2.5 și generalizarea ei Teorema 2.6). În plus estimări optime ale normei în clasa "trace" a operatorilor 2-wavelet multiplicatori sunt date în raport

de simbolul σ și de wavelet-urile (ondulinele) ϕ și ψ (vezi Teorema 3.2). O formula referitoare la "urma" produselor operatorilor 2-wavelet multiplicatori, care sunt pozitivi și în clasa "trace" este de asemenea precizată (vezi Teorema 3.3). În final, un exemplu de operator 2-wavelet multiplicator este dat (așa numitul operator generalizat Landau-Pollak-Slepian) și câteva rezultate ale lui Wong (vezi Capitolul 21 din cartea lui Wong [116]) referitoare la operatorul Landau-Pollak-Slepian sunt extinse de la cazul 1-wavelet la cazul 2-wavelet (vezi Teoremele 4.1, 4.2).

Capitolul II este focusat pe studiul unor clase de operatori pseudo-diferențiali ca de exemplu: operatori pseudo-diferențiali M -hipoeliptici pe $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 < p < \infty$, operatori pseudo-diferențiali SG-hipoeliptici pe $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 < p < \infty$, operatori pseudo-diferențiali multiliniari pe $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 < p < \infty$, operatori pseudo-diferențiali multiliniari pe $\mathbf{Z}^n$ sau $\mathbf{T}^n$ -torul n -dimensional sau operatori pseudo-diferențiali de tip Weyl. Astfel, în Secțiunea 1 din Capitolul II, o estimare analogă estimării Agmon-Douglis-Nirenberg din [1] este obținută pentru operatorii pseudo-diferențiali M -hipoeliptici (vezi Teorema 3.1). Această clasă de operatori pseudo-diferențiali a fost introdusă și studiată de Garello și Morando în [46, 47]. Cu ajutorul acestei estimări ponderate de tipul Agmon-Douglis-Nirenberg se pot obține informații referitoare la domeniile extensiilor minimală și maximală în $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 < p < \infty$, pentru operatorii pseudo-diferențiali M -hipoeliptici (vezi Teorema 3.2). În finalul Secțiunii 1, spectrul și spectrul esențial pentru operatorii pseudo-diferențiali M -hipoeliptici cu coeficienți constanți sunt calculați și o aplicație privind M -hipoelipticitatea operatorului caloric este dată (vezi Teoremele 4.1-4.3 și exemplul considerat).

În Secțiunea 2 a Capitolului II, un analog al inegalității Agmon-Douglis-Nirenberg pentru operatori pseudo-diferențiali M -hipoeliptici perturbați de potențiali singulari pe $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 < p < \infty$ (introduși și studiați de Schechter în [102]) este dat (vezi Teoremele 2.3, 2.5, 2.6). În acest scop o versiune a inegalității Erhling pentru spațiile Sobolev $H^{s,p}$ pe $\mathbf{R}^n$, $-\infty < s < \infty$, $1 \leq p < \infty$ este folosită (vezi Wong [132]). În continuare, câteva rezultate referitoare la spectrul esențial al operatorilor pseudo-diferențiali M -hipoeliptici T_σ , $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 < p < \infty$ perturbați de operatori de forma $\sum_{j=1}^r V_j T_{\tau_j}$, unde V_j este un operator de multiplicare și T_{τ_j} este un operator pseudo-diferențial, al cărui simbol $\tau_j \in M_\rho^{m_j}$ (o clasă de simboluri care apare în cartea lui Taylor [108]), $1 \leq j \leq r$ sunt enunțate și demon-

strate (vezi Teoremele 3.3, 3.4). Mai mult, un rezultat de perturbare pentru semigrupurile tare continue de contracții, generate de operatori pseudo-diferențiali M-hipoeliptici pe $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 < p < \infty$, este obținut. Un "self-adjointness" rezultat pentru perturbațiile aproape singulare ale operatorilor pseudo-diferențiali M-hipoeliptici pe $L^2(\mathbf{R}^n)$, ale căror simboluri sunt independente de x în $\mathbf{R}^n$ este de asemenea dat. La final, este considerat operatorul caloric, pentru a ilustra aplicabilitatea teoriei dezvoltată în această secțiune.

Câteva probleme referitoare la estimății Sobolev, proprietatea Fredholm și spectrul esențial al operatorilor pseudo-diferențiali aparținând unei subclase a clasei operatorilor SG-pseudo-diferențiali, care apar în lucrarea lui Camperi [14], sunt investigate în Secțiunea 3 a Capitolului II (vezi Teoremele 2.4, 2.5, 2.8). Un analog al estimării Agmon-Douglis-Nirenberg din [1], pentru operatori pseudo-diferențiali SG-hipoeliptici, este de asemenea dat (vezi Teoremele 3.1, 3.2, 3.4, 3.5) împreună cu o conjectură referitoare la o versiune a inegalității Erhling pentru spațiile Sobolev $H^{t_1, t_2, p}$, $t_1, t_2, 1 < p < \infty$, $-\infty < t_1, t_2 < \infty$ (vezi Cojectura 3.1). Câteva afirmații referitoare la spectru esențial al perturbărilor operatorilor pseudo-diferențiali SG-hipoeliptici cu potențiali singulari pe $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 < p < \infty$ (ca aceia considerați de Schechter în [102]) sunt enunțate și demonstrate (vezi Teoremele 4.3, 4.4). Un rezultat de perturbare, referitor la semigrupurile tare continue de contracții, generate de operatorii pseudo-diferențiali SG-hipoeliptici pe $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 < p < \infty$, este de asemenea obținut (vezi Teorema 4.6). În plus, se afirmă și se demonstrează, că un operator pseudo-diferențial SG-hipoeliptic este superior semi-Fredholm, iar spectrul său superior semi-Fredholm este calculat (vezi Teoremele 5.1-5.3). La final, se remarcă faptul că, este adevărată o alternativă spectrală, pentru SG-operatori pseudo-diferențiali de ordin $(0, 0)$ (vezi Remarca 5.3).

Accentul este pus în Secțiunea 4 din Capitolul II pe câteva rezultate de L^p -continuitate a operatorilor pseudo-diferențiali multiliniari, $1 \leq p < \infty$ (vezi Teoremele 3.2, 4.1, 7.1). Demonstrația acestor rezultate este bazată pe estimări elementare ale transformărilor Rihaczek multiliniare, Wigner multiliniare și ale transformărilor Weyl multiliniare, care au fost introduse și studiate în acest scop (vezi Teoremele 3.1, 5.2, 5.3, Propozițiile 5.1, 5.4). În plus, o conexiune fundamentală este făcută între operatorii pseudo-diferențiali multiliniari și transformările Weyl multiliniare. Această conexiune stabilește faptul că, o transformare Weyl multiliniară este de fapt un operator pseudo-diferențial multilinear. Folosind această conexiune fundamentală un alt rezul-

tat de L^p -marginire, $1 \leq p < \infty$, pentru operatorii pseudo-diferențiali multiliniari este obținut (vezi Teorema 7.1). Tema fundamentală a Secțiunii 5 este L^p -marginirea operatorilor pseudo-diferențiali pe $\mathbf{Z}^n$ și $\mathbf{T}^n = (\mathbf{R}^n/2\pi\mathbf{Z}^n)$ -torul n -dimensional. Mai precis, condiții suficiente și uneori necesare, pentru L^p -mărginirea acestor clase de operatori multiliniari sunt precizate (vezi Teoremele 4.1, 4.3, 4.5, 8.1). Rezultate de L^2 -mărginire, pentru operatorii pseudo-diferențiali multiliniari pe $\mathbf{Z}^n$ și $\mathbf{T}^n$, cu L^2 -simboluri, sunt de asemenea enunțate și demonstrate (vezi Teoremele 2.2, 3.1). Demonstrațiile acestor rezultate sunt bazate pe estimări elementare ale transformărilor Rihaczek multiliniare introduse în acest scop (vezi Teoremele 2.1, 3.1). Condiții suficiente și o condiție necesară sunt date pentru compacitatea pe $L^p(\mathbf{Z}^n)^m$, a operatorilor pseudo-diferențiali multiliniari studiați (vezi Teoremele 6.1, 6.2). Slab continuitatea operatorilor multiliniari pe m -pliul spațiilor Lebesgue $L^{p_j}(\mathbf{Z}^n)$, $j = 1, 2, \dots, n$ și legătura cu continuitatea operatorilor pseudo-diferențiali multiliniari pe $\mathbf{Z}^n$ este studiată de asemenea. (vezi Teoremele 5.1-5.3). Condiții necesare și suficiente pentru ca operatorii pseudo-diferențiali multiliniari pe $\mathbf{Z}^n$ ori pe $\mathbf{T}^n$ să fie operatori Hilbert-Schmidt sunt de asemenea date (vezi Teoremele 7.2, 8.3).

O clasă de operatori liniari asociată unui spațiu cu măsură finită $(S, \mathcal{B}, m)$ a.î. spațiul său Hilbert $L^2(S)$ să fie separabil, este introdusă și studiată în Secțiunea 6 a Capitolului II. Acești operatori liniari sunt o generalizare a operatorilor pseudo-diferențiali pe $\mathbf{Z}$ și astfel ei vor fi numiți $\mathbf{Z}$ -operatori sau operatori pseudo-diferențiali generalizați pe $\mathbf{Z}$. Rezultate privind L^p -mărginirea, $1 < p < \infty$, și compacitatea pentru $\mathbf{Z}$ -operatori sunt date (vezi Teoremele 2.2, 2.3, 2.4, 2.6, 2.7). Proprietatea Hilbert-Schmidt pentru această clasă de operatori este de asemenea studiată (vezi Teorema 2.1). La final, trei exemple de spații cu măsură finită (în conexiune cu șirurile de polinoame ortogonale) sunt date, cu scopul de a ilustra aplicabilitatea teoriei dezvoltate în această secțiune.

Prin dualitate, poate fi considerată o altă clasă de operatori liniari, asociată unui spațiu cu măsură finită $(S, \mathcal{B}, m)$, pentru care spațiul său Hilbert $L^2(S)$ să fie separabil. Această clasă de operatori liniari este introdusă și studiată în Secțiunea 7 din Capitolul II. Operatorii liniari introduși sunt generalizări ale operatorilor pseudo-diferențiali pe S^1 , cercul unitate cu centrul în origine, de aceea ei vor fi numiți S -operatori sau operatori pseudo-diferențiali generalizați pe S^1 . Rezultate de L^2 -mărginire și compacitate pentru S -operatori sunt date (vezi Teoremele 2.1, 2.6, 2.8). Proprietatea Hilbert-Schmidt pentru această clasă de operatori liniari este de asemenea stu-

diată (vezi Teorema 2.3). În final, sunt date trei exemple de spații cu măsură finită, cărora li se pot aplica rezultatele stabilite anterior.

Operatorul Hermite generalizat și operatorul Landau generalizat sunt introduși și studiați în Secțiunea 8 a Capitolului II. Operatorii pseudo-diferențiali de tip Weyl, i.e. transformările Weyl, transformările Fourier-Wigner și transformările Wigner sunt utilizate în scopul de a deduce o formulă, pentru semigrupurile unu-parametrice tare continue generate de acești operatori diferențiali (vezi Teoremele 4-6, 12-13). Cu ajutorul acestor formule sunt obținute L^2 -estimări în raport de norma L^p , $1 \leq p \leq \infty$, a condițiilor inițiale, pentru soluțiile problemelor cu valori inițiale asociate ecuației căldurii guvernate de operatorul Hermite generalizat sau de operatorul Landau generalizat (vezi Teoremele 7, 14).

În Secțiunea 9 a Capitolului II, o formulă pentru nucleul caloric al operatorului Hermite generalizat pe $\mathbf{R}^2$ este dedusă cu ajutorul operatorilor pseudo-diferențiali de tip Weyl (vezi Teorema 3.2). Cu ajutorul nucleului caloric, o formulă pentru funcția Green a operatorului Hermite generalizat este obținută (vezi Teorema 4.1). Folosind amândouă aceste formule pentru nucleul caloric și pentru funcția Green, se pot studia global hipoelipticitatea în sensul distribuțiilor temperate, ultracontractivitatea și hipercontractivitatea semigrupului unu-parametric tare continuu, generat de operatorul Hermite generalizat (vezi Teoremele 5.1, 6.1, 6.3). La final este dată o formulă pentru semigrupul unu-parametric tare continuu, generat de operatorul Hermite abstract. Această formulă este dedusă cu ajutorul operatorilor abstracti Weyl, Fourier-Wigner și Wigner, care au fost introduși anterior în acest scop (vezi Teoremele 7.1, 7.2).

Un nou operator cu derivate parțiale, așa numitul operatorul generalizat răsucit (twisted) bi-Laplacian de tip (m, n) , $M_{m,n}$, $m, n \in \mathbf{N}^*$ este introdus și studiat în Secțiunea 10 din Capitolul II. Sunt precizate pentru acest operator diferențial, câteva proprietăți spectrale, proprietatea de a fi esențial autoadjunct precum și global hipoelipticitatea în spațiul distribuțiilor temperate, în spațiile Ghelfand-Shilov și în raport cu o familie de noi spații Sobolev (vezi Teoremele 2.1, 3.1, 4.1-4.3, 5.1).

Transformarea Stockwell, o nouă transformare timp-frecvență a unui semnal $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ în raport cu o funcție Gaussiană normalizată

$$\omega(t, \xi) = \frac{|\xi|}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2 \xi^2}{2}}, \quad t, \xi \in \mathbf{R}$$

este definită prin

$$S(\varphi)(\tau, \xi) = \frac{|\xi|}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbf{R}} e^{-\frac{(\tau-t)^2 \xi^2}{2}} \varphi(t) e^{-2\pi i t \xi} dt, \quad \tau, \xi \in \mathbf{R}.$$

Aceasta a fost introdusă în 1996 de Stockwell, Mansinha și Lowe în [107] și reprezintă tema fundamentală a Secțiunilor 1-3 din Capitolul III.

În Secțiunea 1 a Capitolului III sunt construiți operatorii de localizare 2-wavelet corespunzători unei reprezentări ireductibile și de pătrat integrabilă a unui grup local compact Hausdorff pe un spațiu Hilbert $\mathcal{H}_{1-\alpha,0}$, $\alpha > 0$, asociat transformării β -Stockwell, $\beta \in \mathbf{R}$. Trebuie subliniat faptul că acest tip de reprezentări ireductibile de pătrat integrabile au fost introduse de Boggiatto, Fernandez și Galbis în [13]. Acești operatori de localizare 2-wavelet construiți în această secțiune, sunt în fond aceiași ca operatorii de localizare bazați pe formula lui Parseval pentru transformarea β -Stockwell, care a fost formulată și demonstrată în [13]. Bazându-ne pe acest fapt, proprietățile Schatten-von Neumann sunt stabilite și "urmele" pentru operatorii de localizare 2-wavelet din clasa "trac" sunt calculate (vezi Teoremele 3.1, 3.2). În continuare sunt stabilite unele inegalități pentru norma operatorilor de localizare 2-wavelet din clasa "trac" asociați cu transformarea β -Stockwell (vezi Teorema 4.1). La final, un rezultat de compacitate este obținut pentru această clasă de operatori de localizare (vezi Teorema 4.3). Studiul comportării asimptotice a transformării Stockwell (S -transformare) a unui semnal distribuție temperată, prin intermediul comportării quasiasimptotice în origine sau la infinit a semnalului însuși este esența Secțiunii 2 din Capitolul III. În general, în cadrul mai larg al calculului operațional, termenii "teoremă Abeliană" și "teoremă Tauberiană" capătă înțelesuri mai precise. Astfel, în teoremele Abeliene se deduc proprietăți ale imaginii din proprietățile preimaginii, iar în cazul teoremelor Tauberiene lucrurile se petrec în sens opus. În această secțiune se obțin câteva rezultate de tip Abelian (vezi Teoremele 3.1, 3.2) și unele rezultate de tip Tuberian (vezi Teoremele 3.3, 3.4, 3.5) în legătură cu transformarea Stockwell modificată unu-dimensională.

Folosind faptul că transformările Stockwell în cazul unu-dimensional pot fi scrise ca produse de convoluție, au fost introduse și studiate anumite versiuni pentru transformarea Stockwell multiliniară în cadrul Secțiunii 3 din Capitolului III. Mai întâi a fost stabilită o extensie a transformării Stockwell multiliniară de la clasa Schwartz a funcțiilor rapid descrescătoare la spațiul distribuțiilor temperate, iar apoi a fost stabilită o conexiune fundamentală între transformările Stockwell multilinare și operatorii pseudo-diferențiali

multiliniari (vezi Propozițiile 1.1-1.3 și Subsecțiunea 3.2). În plus, au fost stabilite anumite rezultate de mărginire pentru transformarea Stockwell multiliniară pe spațiile Lebesgue $L^p(\mathbf{R}^n)$, $1 \leq p < \infty$ și pe spațiile Hörmander $B_{p,k}(\mathbf{R}^n)$, unde $1 \leq p < \infty$ (vezi Teoremele 3.1, 4.1, 5.2, 5.2', 6.2). În final, un principiu de incertitudine slab pentru transformarea Stockwell multiliniară și pentru adjuncta ei a fost stabilit (vezi Teoremele 7.1, 7.2).

În Capitolul IV sunt stabilite principalele coordonate ale activității didactice și științifice desfășurate după susținerea tezei de doctorat. Se remarcă preocuparea pentru realizarea unui nivel de pregătire academică și științifică superior, în acord cu evoluția din domeniul academic și de cercetare în domeniul matematicii din țările europene și din lume.

Capitolul V creionează câteva direcții pe care se poate înscrie activitatea de cercetare viitoare a autorului tezei de abilitare și care urmăresc să continue pe de o parte temele de cercetare abordate până acum, iar pe de altă parte să promoveze noi teme de cercetare, ca de exemplu probleme legate de analiza neliniară.

În ceea ce privește viitoarea activitate academică se dorește o prezentare modernă a unor rezultate fundamentale obținute în domeniul matematicii în secolul 20, fără a neglija principalele realizări ale acestora din secolele anterioare. Se urmărește totodată familiarizarea studenților cu activitatea de cercetare științifică, prin încurajarea acestora de a participa la sesiunile de comunicări științifice și de a citi anumite articole științifice accesibile la un moment dat.

References

- [1] S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg, Estimates near boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions, I, Comm. Pure Appl. Math. **12**, 623-727(1959).
- [2] M.S. Agranovich, *Spectral properties of elliptic pseudodifferential operators on a closed curve* (Russian) Functional. Anal. i Prilozhen. 13 (1979), 54-56.
- [3] P. Aiena, *Semi-Fredholm Operators, Perturbation Theory and Localized SVEP*, XX Escuela Venezolana de Matematicas, Caracas, Venezuela, 2007.

- [4] J. Alvarez, *Spectra of pseudo-differential operators in the Hörmander class*, Analysis of Divergence Control and Management of Divergent Process, Editors: William O. Brag, Caslav V. Stanojevič, Applied and Numerical Harmonic Analysis 1998, 187–199.
- [5] S.T. Ali , J.-P. Antoine and J.-P. Gazeau, *Coherent States, Wavelets and Their Generalizations*. Springer-Verlag, 2000.
- [6] R. Auscher, M.J. Carro, *On relations between operators on $\mathbf{R}^N, \mathbf{T}^N$ and $\mathbf{Z}^n$* , Studia Math., 101 (2), 165–182, 1992.
- [7] T.A. Bjarnason, S. Drabycz, D.H. Adler, J.C. Cairncross and J.R. Mitchell, *Applying the S-transform to magnetic resonance imaging texture analysis*, Pseudo-Differential Operator: Partial Differential Equations and Time-Frequency Analysis, Fields Institute Communications, Series 52, AMS, 311-321, 2007.
- [8] Boggiatto, P., *Localization operators with L^p symbols on modulation spaces*, Operator Theory Advances and Applications, **155** (2004), 149-163, Birkhäuser Verlag Basel, Switzerland.
- [9] Boggiatto, P. and Wong, M.W., *Two-wavelet localization operators on $L^p(\mathbf{R}^n)$ for the Weyl-Heisenberg group*, Integr. Equ. Oper. Theory **49** (2004), 1–10.
- [10] P. Boggiatto, A. Oliaro and M.W. Wong, *L^p boundedness and compactness of localization operators*, J. Math. Anal. Appl. Vol. 322, Issue 1, 193-206 (2006).
- [11] Boggiatto, P., Cordero E. and Gröchenig, K., *Generalized Anti-Wick operators with symbols in distributional spaces*, Integr. Equ. Oper. Theory **48** (2004), 427-442.
- [12] P. Boggiatto, E. Buzano and L. Rodino, *Global Hypoellipticity and Spectral Theory*. Akademie Verlag, 1996.
- [13] Boggiatto P., Fernandez C. and Galbis A., *A group representation related to the Stockwell transform*, Indiana Univ. Math. J., vol. 58, no. 5, 2009, 2277-2296.

- [14] I. Camperi, *Global hypoellipticity and Sobolev estimates for generalized SG pseudo-differential operators*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, vol. 66, 2(2008), 99-112.
- [15] D. Cardona, *Weak type (1,1) bounds for a class of periodic pseudo-differential operator*, J. Pseudo-Differ. Oper. Appl. 5(2014), 507-515.
- [16] V. Catană, *L^p -boundedness of multilinear pseudo-differential operators on $\mathbf{Z}^n$ and T^n* , Mathematical Modelling of Natural Phenomena, Vol. 09, Issue 05 (2014), 17-38.
- [17] V. Catană, *Schatten-vonNeumann norm inequalities for two-wavelet localization operators*. In Pseudo-Differential Operators: Partial Differential Equations and Time-Frequency Analysis, eds. Luigi Rodino, Bert-Wolfgang Schultze, M.W. Wong, Fields Institute Communications **52** (2007), 265–277, AMS and the Fields Institut for Research in Mathematical Sciences.
- [18] V. Catană, *M -hypoelliptic pseudo-differential operators on $L^p(\mathbf{R}^n)$* , Applicable Analysis, vol.87, no.6, 657-666 (2008).
- [19] V. Catană, *Essential spectra and semigroups of perturbations of M -hypoelliptic pseudo-differential operators on $L^p(\mathbf{R}^n)$* , Complex Variables and Elliptic Equations, vol. 54, 8(2009), 731-744.
- [20] V. Catană, *The heat equation for the generalized Hermite and generalized Landau operators*. Integral Equations and Operator Theory, 66, no. 1, 41-59 (2010).
- [21] V. Catană, *Schatten-von Neumann norm inequalities for two-wavelet localization operators associated with β -Stockwell transforms*, Appl. Anal. 91, no. 3, 503-515, 2012.
- [22] V. Catană, S. Molahajloo and M.W. Wong, *L^p -boundedness of multilinear pseudo-differential operators*, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 205, 167-180, Birkhäuser, 2009.
- [23] V. Catană, *The Heat Kernel and Green Function of the Generalized Hermite Operator and the Abstract Cauchy Problem for the Abstract*

- Hermite Operator*, in Pseudo-Differential Operators: Analysis, Applications and Computations, Operator Theory: Advances and Applications, vol. 213 (2011), 155-171.
- [24] V. Catanaă, *Abelian and Tauberian results for the one-dimensional modified Stockwell transform*, Appl. Anal., 96, No. 6, 1047-1057, (2017).
 - [25] V. Catanaă, *The generalized twisted bi-Laplacian and its spectral properties*, Complex var. Elliptic Equ., 62, No. 6, 814-824 (2017).
 - [26] V. Catanaă, *S-spectral related to a finite measure space*, Appl. Anal., published online 10 Jul, 2018.
 - [27] V. Catanaă, *Multilinear Stockwell transforms*, Math. Modelling of Natural Phenomena, Vol. 13, No. 4, (2018), published online, 21 May 2018.
 - [28] V. Catanaă, *$\mathbf{Z}$ -operators related to a finite measure space*, J. Pseudo-Diff. Oper. and Appl., Vol. 9, Issue 2, 173-188 (2018).
 - [29] V. Catanaă, *Two-wavelet localization operators on homogeneous spaces and their traces*, Integral Equations Oper. Theory, 62, No. 3, 351-363 (2008).
 - [30] V. Catanaă, *Products of Two-Wavelet Multipliers and Their Traces*, Pseudo-Differential Operators: Complex Analysis and Partial Differential Equations, Operator Theory: Advances and Applications, 205, 195-211 (2010), Birkhäuser Verlag Basel.
 - [31] R.T. Carlos Andreas, *L^p -estimates for pseudo-differential operators on $\mathbf{Z}^n$* , J. Pseudo-Differ. Oper. Appl., 2011 (2), 367–375.
 - [32] M. Charalambides, M. Christ, *Near-extremizers of Young's inequality for discrete groups*, arXiv: 1112.3716v1 [math.CA], 16 Dec. 2011.
 - [33] H. Cordes, *The technique of pseudo-differential operators*, University Press, Cambridge, 1995.
 - [34] Cordero E. and Gröchenig, K., *Time frequency analysis of localization operators*, J. Func. Anal. 205 (2003), 107–131.

- [35] Du J., Wong M.W. and Zhu H., *Continuous and discrete inversion formulas for the Stockwell transform*, Integral Transforms Spec. Funct., **18** (2007), 537–543.
- [36] A. Dasgupta and M.W. Wong, *Essential self-adjointness and global hypoellipticity of the twisted Laplacian*. Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, vol. **66**, 1(2008), 75–85.
- [37] A. Dasgupta and M.W. Wong, *Spectral theory of SG-pseudo-differential operators on $L^p(\mathbf{R}^n)$* , Studia Math., 187(2008), 186–197.
- [38] A. Dasgupta and M.W. Wong, *Spectral invariance of SG pseudo-differential operators on $L^p(\mathbf{R}^n)$* , Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 205, 51–57, 2009, Birkhäuser Verlag Basel, Switzerland.
- [39] E.B. Davies, *Heat Kernels and Spectral Theory*. Cambridge University Press, 1989.
- [40] B. Davies, *One Parameter Semigroups*, Academic Press, London, New York, 1980.
- [41] J. Du and M.W. Wong, *A product formula for localization operators*. Bull. Korean Math. Soc. **37**(2000), No 1, 77–84.
- [42] J. Du and M.W. Wong and Z. Zhang, *Trace class norm inequalities for localization operators*. Integr. Equ. Oper. Theory **41**(2001), 497–503.
- [43] C. Fefferman, *L^p bounds for pseudodifferential operators*, Israel, J. Math. **14**, 413–417 (1973).
- [44] G.B. Folland, *A Course in Abstract Harmonic Analysis*. CRC Press, 1995.
- [45] G.B. Folland, *Harmonic Analysis in Phase Space*, Princeton University Press, New Jersey, 1989.
- [46] G. Garello and A. Morando, *A class of L^p bounded pseudodifferential operators*, in Progress in Analysis, Vol. I, edited by H.G.W. Begehr, R.P. Gilbert and M.W. Wong (World Scientific, Singapore, 2003), 689–696.

- [47] G. Garello and A. Morando, L^p -bounded pseudodifferential operators and regularity for multi-quasi-elliptic equations, *Integr. Equ. Oper. Theory*. **51**, 501-517(2005).
- [48] I.M. Ghelfand and G.E. Shilov, *Generalized functions II*, Academic Press, 1968.
- [49] I. Gohberg, S. Goldberg and N. Krupnik, *Traces and Determinants of Linear Operators*. Birkhäuser, 2001.
- [50] M.A. de Gosson, *Symplectic Geometry and Quantum Mechanics*. Basel, Birkhäuser, 2006.
- [51] M.A. de Gosson, *Spectral properties of a class of generalized Landau operators*. *Comm. Part. Diff. Equ.*, **33** (2008), 2096-2104.
- [52] T. Gramchev, S. Pilipovic, L. Rodino, M.W. Wong, Spectral properties of the twisted bi-Laplacian, *Arch. Math.*, 93 (2009), 565-575.
- [53] A. Grassmann, G. Lempierre and Stein, *An algebra of pseudodifferential operators and quantum mechanics in phase space*. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **18**(1968), 343–368.
- [54] L. Grafakos, R.H. Torres, *Multilinear Calderon-Zygmund theory*, *Advances in Mathematics*, 165 (1), 124–164, 2002.
- [55] L. Grafakos, P. Hanzik, *Maximal transference and summability of multilinear Fourier series*, *J. Aust. Math. Soc.*, 80 (1), 65–80, 2006.
- [56] L. Grafakos, *Classical Fourier Analysis Second Edition*, Springer, 2008.
- [57] Gröchenig, K., *Foundations of Time-Frequency Analysis*, *App. Numer. Harmon. Anal.* Birkhäuser, Boston 2001.
- [58] Guo Q., Molahajloo S. and Wong M.W., *Modified Stockwell transforms and time-frequency analysis*, in *New Developments in Pseudo-Differential Operators, Operator Theory: Advances and Applications* **189**, Birkhäuser, 2009, 275–285.
- [59] Q. Guo, S. Molahajloo and M.W. Wong, *Phases of modified Stockwell transforms and instantaneous frequencies*, *J. Math. Phys.*, vol. 51, 2010, 052101, 11 pp.

- [60] Q. Guo and M.W. Wong, *Modified Stockwell transforms*, Memorie della Accademia della Scienze di Torino: Classe di Scienze, Fisiche, Matematiche e Naturali Serie V, vol. 32, 3-20, 2008.
- [61] A. Hulanicki, *The distribution of energy in the Brownian motion in the Gaussian field and analytic-hypoellipticity of certain subelliptic operators on the Heisenberg group*. Studia Math. **56** (1976), 165-173.
- [62] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators III* (Springer-Verlag, Berlin, 1984).
- [63] L. Hörmander, *Pseudo-differential operators and hypoelliptic equations*, In Proc. Symposium on Singular Integrals Amer. Math. Soc., Providence R.I., 10 (1967), 138–183.
- [64] L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators II*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1983.
- [65] Z. He and M.W. Wong, *Wavelet multipliers and signals*. J. Austral. Math. Soc. Ser. B **40**(1999), 437–446.
- [66] G.M. Iancu, *Dynamical Systems Generated by Pseudo-Differential Operators*, Ph.D.Dissertation, York University, 1999.
- [67] H. Iwaniec and C.J. Mozzochi, *On the divisors and circle problems*, J. Number Theory **29** (1988), 60-93.
- [68] L.C. Jang, *Some properties of hypoelliptic pseudodifferential operators*, Bull. Korean Math. Soc. **28**, No.4, 181-184(1991).
- [69] R.V. Kadison, J.R. Ringrose, *Fundamentals of the Theory of Operator Algebras: Elementary Theory*, Academic Press, 1983.
- [70] T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Second Edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New- York 1980.
- [71] Y. Katznelson, *Measure preserving systems* [PDF], math.stanford.edu/~katznel, January 2, 2012.
- [72] W.M. Lioen and J. Van de Lune, *From universal morphisms to megabytes: a Baayen space odyssey*, in Math. Centrum, Centrum Wisk. Inform., Amsterdam, 1994, 421-432.

- [73] L. Liu, *A trace class operator inequality*. J. Math. Anal. Appl. **328**(2007), 1484–1486.
- [74] Liu Y., *Localization operators for two-dimensional Stockwell transforms*, in New Developments in Pseudo-Differential Operators, Operator Theory: Advances and Applications **189**, Birkhäuser, 2009, 287–296.
- [75] Liu Y. and Mohammed A., *$L^p(\mathbf{R})$ boundedness and compactness of localization operators associated with the Stockwell transforms*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, **67**, 2(2009), 203–214.
- [76] Liu Y. and Wong M.W., *Inversion formulas for two-dimensional Stockwell transform*, in Pseudo-Differential Operators: Partial Differential Equations and Time-Frequency Analysis, Fields Institute Communications, Series **52**, American Mathematical Society, 2007, 323–330.
- [77] W. Magnus, F. Oberhettinger and R.P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*. Springer-Verlag, 1964.
- [78] S. Malahajloo, M.W. Wong, *Pseudo-differential operators on S^1* , in Operator Theory: Advances and Applications, vol. 189, 297–306, Birkhäuser Verlag, Basel, 2008.
- [79] S. Malahajloo, *Pseudo-differential operators on $\mathbf{Z}$* , in Operator Theory: Advances and Applications, vol. 205, 213–221, Birkhäuser Verlag, Basel, 2009.
- [80] S. Molahajloo, M.W. Wong, *Ellipticity, Fredholmness and spectral invariance of pseudo-differential operators on S^1* , J. Pseudo. Differ. Oper. Appl., 1 (2010), 183–205.
- [81] Molahajloo S. and Wong M.W., *Square-integrable group representations and localization operators for modified Stockwell transforms*, Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, **67** (2009), 215–227.
- [82] F. Nicola and L. Rodino, *Global Pseudo-Differential Calculus on Euclidean Spaces, Pseudo-differential operators, theory and applications*, Vol. 4, Springer, 2010.

- [83] C. Parenti, *Operatori pseudodifferenziali in $\mathbf{R}^n$, e applicazioni*, Ann. Mat. Pura Appl. 93 (1972), 359–389.
- [84] R.S. Pathak and S.K. Singh, *Boundedness of the wavelet transform in certain function spaces*, Journal of inequalities in pure and applied mathematics, 303-305, 2007.
- [85] A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, Berlin, Heidelberg, Tokyo, 1983.
- [86] Pilipovič, S., *Quasiasymptotics Expansion and Laplace Transformation*, Applicable Analysis 35(1996), 243-261.
- [87] Pilipovič, S., Stankovič, A., Teofanov, N., *Wavelets and quasiasymptotics at a point*, J. Approx. Theory 97(1997), 40-52.
- [88] Pilipovič, S., Teofanov, N., *Multiresolution expansion, approximation order and quasiasymptotic behavior of tempered distributions*, J. Math. Anal. Appl., 331(2007), 455-471.
- [89] J.C.T. Pool, *Mathematical aspects of the Weyl correspondence*. J. Math. Phys. 7(1966), 66–76.
- [90] M. Reed and B. Simon, *Fourier Analysis, Self-Adjointness*. Academic Press, 1975.
- [91] L. Riba and M.W. Wong, *Continuous inversion formulas for multi-dimensional Stockwell transforms*, Math. Model. Nat. Phenom., vol. 8, 215-229, 2013.
- [92] L. Riba, *Multi-Dimensional Stockwell Transforms and Applications*, Ph. D. Disertation, Universita degli Studi di Torino, 2014.
- [93] L. Riba and M.W. Wong, *Continuous inversion formulas for multi-dimensional modified Stockwell transform*, Integral Transforms and Special Functions, vol. 26, no.1, 9-19, 2015.
- [94] M. Ruzhansky, V. Tureman, *Quantization of pseudo-differential operators on the Torus*, Numer. Funct. Anal. Optim., 30(9), 1098-1124, 2009.

- [95] M. Ruzhansky, V. Tureman, *Pseudo-differential operators*. Monographs Appeared in Birhäuser, 2010.
- [96] M. Ruzhanski and V. Turunen, *On the Fourier analysis of operator on the torus*, in Modern Trends in Pseudo-Differential Operator, Editors: J. Toft, M.W. Wong and H. Zhu, Birkhäuser, 2007, 87-105.
- [97] M. Ruzhanski and V. Turunen, *Pseudo-Differential Operators and Symmetries*, Birkhäuser 2010.
- [98] Saneva, K., Aceska, R., Kostadinova, S., *Some Abelian and Tauberian results for the short-time Fourier transform*, Novi Sad, J. Math. 43(2013), 81-89.
- [99] Saneva, K., Vindas, J., *Wavelet expansions and asymptotic behavior of distributions*, J. Math. Anal. Appl. 370(2010), 543-554.
- [100] M. Schechter, On the essential spectrum of an arbitrary operator I, J. Math. Anal. Appl. **13**, 205-215 (1966).
- [101] M. Schechter, *Principles of Functional Analysis*, Second Edition, Graduate Studies in Mathematics, vol. 36, A.M.S., 2002.
- [102] M. Schechter, *Spectra of Partial Differential Operators*, North-Holland, Amsterdam, 1971.
- [103] M.A. Shubin, *Pseudo-Differential Operators and Spectral Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1987.
- [104] S.K. Singh, *The S-transform of distributions*, The Scientific World Journal, vol. 2014, Article ID 623294, 4 pp.
- [105] E.M. Stein and G. Weiss, *Introduction to Fourier Analysis on Euclidian Spaces*, Princeton University Press, 1971.
- [106] R.G. Stockwell, *Why use the S-trasnform*, in Pseudo-Differential Operators: Partial Differential Equations and Time-Frequency Analysis, Fields Institute Communications, Series **52**, American Mathematical Society, 2007, 279–309.

- [107] R.G. Stockwell, L. Mansinha and R.P. Lowe, *Localization of the complex spectrum: The S transform*, IEEE Trans. Signal Processing, **44** (1996), 998–1001.
- [108] M.E. Taylor, *Pseudodifferential Operators*(Princeton University Press, Princeton, 1981).
- [109] S. Thangavelu, *Lectures on Hermite and Laguerre Expansions*. Princeton University Press, 1993.
- [110] S. Thangavelu, *Harmonic Analysis on the Heisenberg Group*. Birkhäuser, 1998.
- [111] J. Toft, *Regularizations, decompositions and lower bound problems in the Weyl calculus*. Comm. Partial Differential Equations **25**(2000), 1201–1234.
- [112] J. Vindas, S. Pilipović and D. Rakic, *Tauberian theorems for the wavelet transform*, J. Fourier Anal. Appl. 17(2011), 65-69.
- [113] J. Vindas, S. Pilipović, *Structural theorems for quasiasymptotics of distributions at the origin*, Math. Nachr. 282(2009), 1584-1599.
- [114] J. Vindas, *Structural theorems for quasiasymptotics of distributions at infinity*, Pub. Inst. Math. Beograd, N.S., 84 (98)(2008), 159-174.
- [115] V.S. Vladimirov, Ju. Drozinov, B.I. Zavialov, *Tauberian Theorems for Generalized Functions*, Dordrecht: Kluwer Academic Publishers Group, 1988.
- [116] M.W. Wong, *Wavelet Transforms and Localization Operators*. Birkhäuser Verlag, Basel-Boston-Berlin, 2002.
- [117] M.W. Wong and Z. Zhang, *Traces of two-wavelet multipliers*, Integr. Equ. Oper. Theory **42** (2002), 498–503.
- [118] M.W. Wong, *L^p boundedness of localization operators associated to left regular representation*, Proceedings of the American Mathematical Society, **130**, no. 10 (2002), 2911–2919.
- [119] M.W. Wong and Z. Zhang, *Traces of localization operators with two admissible wavelets*, Anziam J. 44 (2003), 17–25.

- [120] M.W. Wong, *Weyl Transforms*. Springer Verlag, 1998.
- [121] M.W. Wong, *Discrete Fourier Analysis*, Birhäuser, 2011.
- [122] M.W. Wong and Z. Zhang, *Trace class norm inequalities for wavelet multipliers*. Bull. London Math. Soc. **34**(2002), 739–744.
- [123] M.W. Wong, *Trace-class Weyl transforms, in Operator Theory: Advances and Applications*. Vol. **160**(2005), 469–478.
- [124] M.W. Wong, L^p -spectra of strongly Carleman pseudo-differential operators, J. Func. Anal. **44**, 163-173 (1981).
- [125] M.W. Wong, An Introduction to Pseudo-Differential Operators, Second Edition (World Scientific, Singapore, 1999).
- [126] M.W. Wong, M -elliptic pseudo-differential operators on $L^p(\mathbf{R}^n)$, Math. Nachr. **279**, No.3, 319-326 (2006).
- [127] M.W. Wong, Spectral analysis of strongly Carleman pseudo-differential operators, J. London Math. Soc. (2), 21(1980), 527-540.
- [128] M.W. Wong, On some spectral properties of elliptic pseudodifferential operators, Proceedings of the Amer.Math.Soc., vol.99, no.4, 683-689, 1987.
- [129] M.W. Wong, Essential spectra of elliptic pseudo-differential operators, Comm. Partial Differential Equations 13(1988), 1209-1221.
- [130] M.W. Wong, A contraction semigroup generated by a pseudo-differential operator, Differential Integral Equations 5(1992), 193-200.
- [131] M.W. Wong, Spectral theory of pseudo-differential operators, Adv. Appl. Math. 15(1994), 437-451.
- [132] M.W. Wong, Erhling's inequality and pseudo-differential operators on $L^p(\mathbf{R}^n)$, Cubo 8, No.1, 97-108 (2006).
- [133] K. Yosida, *Functional Analysis*, Third Edition, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, Yew-York, 1971.
- [134] M.W. Wong, *The heat equation for the Hermite operator on the Heisenberg group*. Hokkaido Math. Journal, **34** (2005), 393-404.

- [135] M.W. Wong, *Weyl Transforms, the heat kernel and Green function of a degenerate elliptic operator*, Ann. Global Anal. Geom. (2005), 271–283.
- [136] M.W. Wong, *The heat equation for the Hermite operator on the Heisenberg group*. Hokkaido Mathematical Journal, **34**(2005), 393–404.
- [137] M.W. Wong and H. Zhu, *A characterization of the Stockwell spectrum*, in Modern Trends in Pseudo-Differential Operators, Operator Theory: Advances and Applications **172**, Birkhäuser, 2007, 251–257.
- [138] Z. Zhang, *Localization Operators and Wavelet Multipliers*, Ph.D. Dissertation, York University, 2003.