Rezultate în Teoria Punctului Fix şi Procese Iterative cu Aplicaţii

Asist. drd. Adrian Sorinel Ghiura
Departamentul de Matematică & Informatică
Universitatea "Politehnica" din Bucureşti

REZUMATUL TEZEI DE DOCTORAT

Conducător ştiinţific: prof. dr. habil. Mihai Postolache

Bucureşti, Mai, 2017

Cuprins

Cuvinte cheie

Teorema lui Caristi, C^*-algebră, spaţiu metric, spaţiu metric cu valori într-o C^*-algebră, spaţiu b-metric, aplicaţie contractivă, teoremă de punct fix, aplicaţie asimptotic neexpansivă în sens intermediar, punct fix comun, spaţiu Banach uniform convex, convergenţă, convergenţă slabă, viteză de convergenţă, inegalitate cvasi variaţională, operator de proiecţie, metodă iterativă, ecuaţii Wiener-Hopf.

Lucrări publicate

1. Shehwar, D, Batul, S, Kamran, T, **Ghiura, A**: *Caristi's fixed point theorem on C^*-algebra-valued metric spaces.* J. Nonlinear Sci. Appl. **9**, 584-588 (2016)

2. Saluja, GS, Postolache, M, **Ghiura, A**: *Convergence theorems for mixed type asymptotically nonexpansive mappings in the intermediate sense.* J. Nonlinear Sci. Appl. **9**, 5119-5135 (2016)

3. Noor, MA, Noor, KI, Khan, AG, **Ghiura, A**: *Iterative algorithms for solving a class of quasi variational inequalities.* U.P.B. Sci. Bull. Ser. A **78**(3), 3-18 (2016).

4. Kamran, T, Postolache, M, **Ghiura, A**, Batul, S, Ali, R: *The Banach contraction principle in C^*-algebra-valued b-metric spaces with application.* Fixed Point Theory Appl. 2016:10 (2016)

5. Fathollahi, S, **Ghiura, A**, Postolache, M, Rezapour, S: *A comparative study on the convergence rate of some iteration methods involving contractive mappings.* Fixed Point Theory Appl. 2015:234 (2015)

Mulţumiri

Folosesc această ocazie pentru a-mi exprima aprecierea şi recunoştinţa sinceră pentru îndrumările utile furnizate de următorii colaboratori:

Prof. Dr. Tayyab Kamran, Quaid-i-Azam University, Islamabad şi M.U. Ali, National University of Computer and Emerging Sciences, Islamabad, pentru cercetarea noastră privind spaţiile metrice cu valori în C^*-algebre.

Dr. Gurucharan Saluja, Govt. Nagarjuna P.G. College of Science, Raipur, cu care am lucrat la articolul care a condus la realizarea capitolului 2.

Prof. Dr. Shahram Rezapour, Azarbaijan Sahid Madani University, pentru amabilitatea de a mă accepta în grupul său de cercetare. Îmi amintesc cu drag de discuţiile din timpul vizitei domniei sale la departamentul nostru.

Prof. Dr. Muhammad Aslam Noor, COMSATS, expert în Analiza Neliniară. Sub conducerea domniei sale am realizat studiul algoritmilor iterativi pentru inegalităţi variaţionale şi concluziile în această direcţie.

Prof. dr. hab. Mihai Postolache, University Politehnica of Bucharest, conducătorului meu de doctorat, pentru răbdarea sa de a accepta oricând discuţii profesionale cu privire la subiectul acestei Teze.

Rezumat

În această teză introducem rezultate în teoria punctului fix cu referire la: metrici cu valori într-o C^*-algebră, analiza calitativă a unor procese iterative şi aplicaţii la inegalităţi variaţionale. Aceste rezultate sunt obţinute după consultări cu personalităţi în domeniu (T. Kamran, G.S. Saluja, Sh. Rezapour, M. Aslam Noor) pe durata a aproape patru ani. Studiul este motivat de cercetarea la zi, dezvoltată de oameni de ştiinţă de top şi de posibile dezvoltări pentru aplicaţii concrete; a se vedea Bakhtin [7], Banach [8], Berinde [13], Czerwick [19], Mann [38], Noor *ş.a.* [45], Saluja [52], Thakur *ş.a.* [60]. Rezultatele obţinute sunt publicate în reviste selective, cum ar fi: J. Nonlinear Sci. Appl., Fixed Point Theory Appl., şi U.P.B. Sci. Bull. Ser. A.

În capitolul 1 prezentăm teoreme de punct fix în contextul spaţiilor metrice cu valori în C^*-algebre. Pe baza conceptului de C^*-algebră şi a proprietăţilor aferente, enuntăm o teoremă de punct fix de tip Caristi. Apoi, introducem noţiunea de spaţiu b-metric cu valori într-o C^*-algebră şi extindem principiul contracţiei Banach în acest cadru. Studiul din acest capitol este o continuare naturală a studiilor realizate de Batul şi Kamran [9], Khamsi şi Kirk [30], Czerwick [18], Ma *ş.a.* [37].

Rezultatele noi din acest capitol sunt: Definiţia 1.5, Exemplul 1.1, Lema 1.1, Teorema 1.1, Teorema 1.2, Exemplul 1.2, Definiţia 1.7, Exemplul 1.3, Definiţia 1.8, Exemplul 1.4, Teorema 1.3, Exemplul 1.5, Aplicaţie. Ele sunt publicate în [55] şi [29] (Shehwar, D, Batul, S, Kamran, T, Ghiura, A: *Caristi's fixed point theorem on C^*-algebra-valued metric spaces*, J. Nonlinear Sci. Appl. 9, 584-588 (2016) şi Kamran, T, Postolache, M, Ghiura, A, Batul, S, Ali, R: *The Banach contraction principle in C^*-algebra-valued b-metric spaces with application*, Fixed Point Theory Appl. 2016:10 (2016)).

Pentru introducerea rezultatelor din primul capitol, notăm cu $\mathbb{A}$ o C^*-algebră, cu element unitate $1_{\mathbb{A}}$, iar cu $\mathbb{A}_+$ mulţimea elementelor pozitive din $\mathbb{A}$.

Definiţia 0.1 ([37])**.** Fie X o mulţime nevidă. O aplicaţie $d\colon X \times X \to \mathbb{A}_+$ se numeşte metrică cu valori într-o C^*-algebră dacă îndeplineşte următoarele condiţii:

(i) $0_{\mathbb{A}} \preceq d(x,y)\ \forall x,y \in X$ şi $d(x,y) = 0_{\mathbb{A}} \Leftrightarrow x = y$,

(ii) $d(x,y) = d(y,x)\ \forall x,y \in X$,

(iii) $d(x,y) \preceq d(x,z) + d(z,y)\ \forall x,y,z \in X$.

Tripletul $(X, \mathbb{A}, d)$ se numeşte spaţiu metric cu valori într-o C^*-algebră.

Noţiunea de inferior semicontinuitate în contextul spaţiilor metrice cu valori într-o C^*-algebră este ipoteză în primul rezultat principal.

Definiţia 0.2. Fie $(X, \mathbb{A}, d)$ un spaţiu metric cu valori într-o C^*-algebră. O aplicaţie $\phi\colon X \to \mathbb{A}$ se numeşte inferior semicontinuă în x_0 în raport cu $\mathbb{A}$ dacă

$$\|\phi(x_0)\| \leq \liminf_{x \to x_0} \|\phi(x)\|.$$

Lema 0.1. *Fie $(X, \mathbb{A}, d)$ un spaţiu metric cu valori într-o C^*-algebră şi fie $\phi\colon X \to \mathbb{A}_+$ o aplicaţie. Definim relaţia de ordine $\preceq_\phi$ pe X prin*

$$x \preceq_\phi y \iff d(x, y) \preceq \phi(y) - \phi(x) \text{ pentru orice } x, y \in X. \tag{1}$$

Atunci $\preceq_\phi$ este o relaţie de ordine parţială pe X.

Teorema 0.1. *Fie $(X, \mathbb{A}, d)$ un spaţiu metric complet cu valori într-o C^*-algebră şi $\phi\colon X \to \mathbb{A}_+$ o aplicaţie inferior semicontinuă. Atunci $(X, \preceq_\phi)$ are un element minimal, unde $\preceq_\phi$ este definită prin* (1)*.*

Ca o consecinţă a teoremei de mai sus avem următorul rezultat de punct fix.

Teorema 0.2. *Fie $(X, \mathbb{A}, d)$ un spaţiu metric complet cu valori într-o C^*-algebră şi $\phi\colon X \to \mathbb{A}_+$ o aplicaţie inferior semicontinuă. Fie $T\colon X \to X$ astfel încât*

$$d(x, Tx) \preceq \phi(x) - \phi(Tx), \quad \text{pentru orice } x \in X.$$

Atunci T are cel puţin un punct fix.

În a doua parte a capitolului 1, introducem noţiunea de spaţiu b-metric în contextul C^*-algebrelor după cum urmează.

Definiţia 0.3 ([37])**.** Fie $(X, \mathbb{A}, d)$ un spaţiu metric cu valori într-o C^*-algebră. O aplicaţie $T\colon X \to X$ se numeşte contracţie pe X dacă există $a \in \mathbb{A}$, cu $\|a\| < 1$, astfel încât

$$d(Tx, Ty) \preceq a^* d(x, y) a, \ \forall x, y \in X.$$

Definiţia 0.4. Fie C^*-algebra $\mathbb{A}$ şi X o mulţime nevidă. Fie $b \in \mathbb{A}$ astfel încât $\|b\| \geq 1$. O aplicaţie $d_b\colon X \times X \to \mathbb{A}_+$ se numeşte b-metrică pe X cu valori într-o C^*-algebră dacă au loc următoarele condiţii pentru orice $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{A}$:

(BM1) $d_b(x_1, x_2) = 0_{\mathbb{A}} \Leftrightarrow x_1 = x_2$;

(BM2) d_b este simetrică, adică $d_b(x_1, x_2) = d_b(x_2, x_1)$;

(BM3) $d_b(x_1, x_2) \preceq b\,[d_b(x_1, x_3) + d_b(x_3, x_2)]$.

Tripletul $(X, \mathbb{A}, d_b)$ se numeşte spaţiu b-metric cu valori într-o C^*-algebră cu coeficient b.

Definiţia 0.5. Fie $(X, \mathbb{A}, d_b)$ spaţiu b-metric cu valori într-o C^*-algebră. O contracţie pe X este o aplicaţie $T\colon X \to X$ pentru care există $a \in \mathbb{A}$, cu $\|a\| < 1$, astfel încât

$$d_b(Tx, Ty) \preceq a^* d_b(x, y)a, \quad \forall x, y \in X.$$

Teorema 0.3. *Considerăm un spaţiu b-metric complet cu valori într-o C^*-algebră cu coeficient b. Fie $T\colon X \to X$ o contracţie cu constanta a, astfel încât $\|b\|\|a\|^2 < 1$. Atunci T are un punct fix unic în X.*

Pentru exemple şi aplicaţii care ilustrează aceste rezultate, a se vedea [29, 55].

În capitolul 2, **Proces iterativ pentru aplicaţii asimptotic neexpansive de tip mixt**, studiem procesul iterativ Wei şi Guo [63] pentru aplicaţii asimptotic neexpansive în sens intermediar, de tip mixt. Stabilim teoreme de convergenţă şi convergenţă slabă în spaţii Banach uniform convexe. Rezultatele noastre sunt în aria de studiu a unor personalităţi precum: Chidume *ş.a.* [15, 16], Guo *ş.a.* [26, 27], Saluja [52], Schu [54], Tan şi Xu [59], Wang [61], Wei şi Guo [62, 63].

Contribuţia în acest capitol este: Exemplul 2.1, Exemplul 2.2, Lema 2.5, Lema 2.6, Teorema 2.1, Teorema 2.2, Teorema 2.3, Lema 2.7, Lema 2.8, Teorema 2.4, Teorema 2.5, Teorema 2.6, Exemplul 2.3, Exemplul 2.4, Exemplul 2.5. Aceste rezultate sunt publicate în [53] (Saluja, GS, Postolache, M, Ghiura, A: *Convergence theorems for mixed type asymptotically nonexpansive mappings in the intermediate sense.* J. Nonlinear Sci. Appl. 9, 5119-5135 (2016)).

Definiţia de mai jos este datorată lui Chidume *et al.* [16].

Definiţia 0.6. Fie K o submulţime nevidă a unui spaţiu Banch real uniform convex E şi $P\colon E \to K$ o retracţie neexpansivă a lui E în K. O aplicaţie $T\colon K \to E$ se numeşte asimptotic neexpansivă în sens intermediar dacă T este uniform continuă şi

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_{x,y\in K} \Big(\|T(PT)^{n-1}(x) - T(PT)^{n-1}(y)\| - \|x - y\| \Big) \ \leq \ 0.$$

Wei şi Guo [63] au introdus o nouă schemă iterativă de tip mixt, după cum urmează:

$$\begin{aligned} x_1 &= x \in K, \\ x_{n+1} &= P(\alpha_n S_1^n x_n + \beta_n T_1 (PT_1)^{n-1} y_n + \gamma_n u_n), \\ y_n &= P(\alpha'_n S_2^n x_n + \beta'_n T_2 (PT_2)^{n-1} x_n + \gamma'_n u'_n),\ n \geq 1, \end{aligned} \tag{2}$$

unde $\{u_n\}$, $\{u'_n\}$ sunt şiruri mărginite din E, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{\alpha'_n\}$, $\{\beta'_n\}$, $\{\gamma'_n\}$ sunt şiruri din $[0, 1)$ verificând $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1 = \alpha'_n + \beta'_n + \gamma'_n$ pentru orice $n \geq 1$, şi au demonstrat unele teoreme de convergenţă slabă în contextul spaţiilor Banach reale uniform convexe.

Scopul capitolului 2 este de a studia schema iterativă (2) pentru aplicaţii asimptotic neexpansive în sens intermediar, de tip mixt, care sunt mai generale decât aplicaţiile asimptotic neexpansive pe spaţii Banach uniform convexe. Aici stabilim teoreme de convergenţă şi convergenţă slabă pentru schema şi aplicaţiile menţionate.

Următoarele două leme sunt rezultate tehnice, folosite pentru a obţine teoremele de convergenţă.

Lema 0.2. *Fie E un spaţiu Banch real uniform convex, K o submulţime nevidă, închisă şi convexă a lui E. Fie $S_1, S_2 \colon K \to K$ şi $T_1, T_2 \colon K \to E$ aplicaţii asimptotic neexpansive în sens intermediar. Notăm*

$$\begin{aligned} G_n &= \max\Big\{0, \sup_{x,\, y \in K,\, n \geq 1} \Big(\|S_1^n x - S_1^n y\| - \|x-y\|\Big), \\ &\qquad \sup_{x,\, y \in K,\, n \geq 1} \Big(\|S_2^n x - S_2^n y\| - \|x-y\|\Big)\Big\} \end{aligned}$$

şi

$$\begin{aligned} H_n &= \max\Big\{0, \sup_{x,\, y \in K,\, n \geq 1} \Big(\|T_1(PT_1)^{n-1}(x) - T_1(PT_1)^{n-1}(y)\| - \|x-y\|\Big), \\ &\qquad \sup_{x,\, y \in K,\, n \geq 1} \Big(\|T_2(PT_2)^{n-1}(x) - T_2(PT_2)^{n-1}(y)\Big)\Big\} \end{aligned}$$

astfel încât $\sum_{n=1}^{\infty} G_n < \infty$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} H_n < \infty$. Fie şirul $\{x_n\}$ definit prin (2), unde $\{u_n\}$, $\{u_n'\}$ sunt şiruri mărginite din E, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{\alpha_n'\}$, $\{\beta_n'\}$, $\{\gamma_n'\}$ sunt şiruri din $[0,1)$ verificând $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1 = \alpha_n' + \beta_n' + \gamma_n'$ pentru orice $n \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n' < \infty$. Presupunem că $F = F(S_1) \bigcap F(S_2) \bigcap F(T_1) \bigcap F(T_2) \neq \emptyset$. Atunci există $\lim_{n\to\infty} \|x_n - q\|$ şi $\lim_{n\to\infty} d(x_n, F)$ pentru orice $q \in F$.

Lema 0.3. *Fie E un spaţiu Banch real uniform convex, K o submulţime nevidă, închisă şi convexă a lui E. Fie $S_1, S_2 \colon K \to K$ şi $T_1, T_2 \colon K \to E$ aplicaţii asimptotic neexpansive în sens intermediar iar G_n şi H_n definite ca în Lema 0.2. Presupunem că $F = F(S_1) \bigcap F(S_2) \bigcap F(T_1) \bigcap F(T_2) \neq \emptyset$. Fie şirul $\{x_n\}$ definit prin (2), unde $\{u_n\}$, $\{u_n'\}$ sunt şiruri mărginite din E, $\{\alpha_n\}$, $\{\beta_n\}$, $\{\gamma_n\}$, $\{\alpha_n'\}$, $\{\beta_n'\}$, $\{\gamma_n'\}$ sunt şiruri din $[0,1)$ verificând $\alpha_n + \beta_n + \gamma_n = 1 = \alpha_n' + \beta_n' + \gamma_n'$ pentru orice $n \geq 1$, $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$ şi $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n' < \infty$. Dacă au loc următoarele condiţii:*

(i) $\{\beta_n\}$ şi $\{\beta_n'\}$ sunt şiruri din $[\rho, 1-\rho]$ pentru orice $n \geq 1$ şi $\rho \in (0,1)$.

(ii) $\|x - T_i(PT_i)^{n-1} y\| \leq \|S_i^n x - T_i(PT_i)^{n-1} y\|$ pentru orice $x, y \in K$ şi $i = 1, 2$.

Atunci $\lim_{n\to\infty} \|x_n - S_i x_n\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - T_i x_n\| = 0$ pentru $i = 1, 2$.

Teorema 0.4. *Dacă au loc ipotezele din Lema* 0.3 *iar una dintre aplicaţiile* S_1, S_2, T_1 *şi* T_2 *este complet-continuă, atunci şirul* $\{x_n\}$ *definit prin* (2) *converge la un punct fix comun al aplicaţiilor* S_1, S_2, T_1 *şi* T_2.

Pentru rezultatul următor, avem nevoie de următoarea definiţie.

O aplicaţie $T\colon K \to K$ se numeşte semi-compactă dacă pentru orice şir mărginit $\{x_n\}$ din K astfel încât $\|x_n - Tx_n\| \to 0$ pentru $n \to \infty$, există un subşir $\{x_{n_r}\} \subset \{x_n\}$ astfel încât $x_{n_r} \to x^* \in K$ pentru $r \to \infty$.

Teorema 0.5. *Dacă au loc ipotezele din Lema* 0.3 *iar una dintre aplicaţiile* S_1, S_2, T_1 *şi* T_2 *este semi-compactă, atunci şirul* $\{x_n\}$ *definit prin* (2) *converge la un punct fix comun al aplicaţiilor* S_1, S_2, T_1 *şi* T_2.

Teorema 0.6. *În ipotezele din Lema* 0.3 *presupunem că există o funcţie continuă* $f\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ *cu* $f(0) = 0$ *şi* $f(t) > 0$ *pentru orice* $t \in (0,\infty)$ *astfel încât*

$$f(d(x,F)) \leq a_1 \|x - S_1x\| + a_2 \|x - S_2x\| + a_3 \|x - T_1x\| + a_4 \|x - T_2x\|$$

pentru orice $x \in K$, *unde* $F = F(S_1) \cap F(S_2) \cap F(T_1) \cap F(T_2)$ *şi* a_1, a_2, a_3, a_4 *sunt numere reale pozitive astfel încât* $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1$. *Atunci şirul* $\{x_n\}$ *definit prin* (2) *converge la un punct fix comun al aplicaţiilor* S_1, S_2, T_1 *şi* T_2.

În continuare, am demonstrat unele teoreme de convergenţă slabă ale schemei iterative (2) pentru aplicaţii asimptotic neexpansive în sens intermediar, de tip mixt, în spaţii Banach reale uniform convexe.

Lema 0.4. *Presupunem că au loc ipotezele din Lema* 0.2. *Atunci, pentru orice* $p_1, p_2 \in F = F(S_1) \cap F(S_2) \cap F(T_1) \cap F(T_2)$, *există limita*

$$\lim_{n\to\infty} \|tx_n + (1-t)p_1 - p_2\|$$

oricare ar fi $t \in [0,1]$, *unde* $\{x_n\}$ *este şirul definit prin* (2).

Lema 0.5. *În ipotezele Lemei* 0.2, *presupunem ca norma pe* E *este diferenţiabilă Fréchet. Dacă pentru orice* $p_1, p_2 \in F = F(S_1) \cap F(S_2) \cap F(T_1) \cap F(T_2)$, *există limita*

$$\lim_{n\to\infty} \langle x_n, J(p_1 - p_2)\rangle,$$

unde $\{x_n\}$ *este şirul definit prin* (2) *iar* $\omega_w(x_n)$ *reprezintă mulţimea* ω*-limitelor lui* $\{x_n\}$, *atunci* $\langle l_1 - l_2, J(p_1 - p_2)\rangle = 0$ *pentru orice* $p_1, p_2 \in F$ *şi* $l_1, l_2 \in \omega_w(\{x_n\})$.

Teorema 0.7. *În ipotezele Lemei* 0.3*, presupunem ca norma pe E este diferenţiabilă Fréchet. Atunci, şirul $\{x_n\}$ definit prin* (2) *converge slab la un punct fix comun al aplicaţiilor S_1, S_2, T_1 şi T_2.*

Teorema 0.8. *În ipotezele Lemei* 0.3*, presupunem că spaţiul dual E^* a lui E are proprietatea Kadec-Klee (KK). Dacă aplicaţiile $I - S_i$ şi $I - T_i$, $i = 1, 2$, unde I reprezintă aplicaţia identitate, sunt semi-închise în zero, atunci şirul $\{x_n\}$ definit prin* (2) *converge slab la un punct fix comun al aplicaţiilor S_1, S_2, T_1 şi T_2.*

Teorema 0.9. *În ipotezele Lemei* 0.3*, presupunem că E satisface condiţia lui Opial, iar aplicaţiile $I - S_i$ şi $I - T_i$, $i = 1, 2$, unde I reprezintă aplicaţia identitate, sunt semi-închise în zero. Atunci şirul $\{x_n\}$ definit prin* (2) *converge slab la un punct fix comun al aplicaţiilor S_1, S_2, T_1 şi T_2.*

Pentru exemple care ilustrează aceste rezultate, consultaţi [53].

În capitolul 3, **Un studiu comparativ al unor procese iterative**, comparăm vitezele de convergenţă ale unor metode iterative pentru contracţii şi arătăm că şirurile implicate în aceste metode au un rol important în determinarea vitezei de convergenţă. Prin acest studiu continuăm cercetarea lui Babu şi Vara Prasad [5], Berinde [10, 11, 12, 13], Chugh and Kumar [17], Popescu [51], Thakur *ş.a.* [60].

Rezultate originale în acest capitol sunt: Propoziţia 3.1, Propoziţia 3.2, Teorema 3.1, Lema 3.1, Lema 3.2, Lema 3.3, Lema 3.4, Teorema 3.2, Teorema 3.3, Teorema 3.4, Teorema 3.5, Exemplul 3.1, Exemplul 3.2, Exemplul 3.3, Exemplul 3.4. Ele sunt publicate în [22] (Fathollahi, S, Ghiura, A, Postolache, M, Rezapour, S: *A comparative study on the convergence rate of some iteration methods involving contractive mappings.* Fixed Point Theory Appl. 2015:234 (2015)).

Fie (X, d) un spaţiu metric, $x_0 \in X$ şi $T\colon X \to X$ o aplicaţie. Iteraţia Picard este definită prin

$$x_{n+1} = Tx_n$$

pentru orice $n \geq 0$. Fie $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$, $\{\beta_n\}_{n\geq 0}$ şi $\{\gamma_n\}_{n\geq 0}$ şiruri în $[0, 1]$. Atunci metoda iterativă Mann este definită prin

$$x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1 - \alpha_n)Tx_n \tag{3}$$

pentru orice $n \geq 0$ (pentru mai multe informaţii, a se vedea Mann [38]). De asemenea, metoda iterativă Ishikawa este definită prin

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1 - \alpha_n)x_n + \alpha_n Ty_n, \\ y_n = (1 - \beta_n)x_n + \beta_n Tx_n \end{cases} \tag{4}$$

pentru orice $n \geq 0$ (pentru mai multe informaţii, a se vedea Ishikawa [28]). Metoda iterativă Noor este definită prin

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T z_n, \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{cases} \tag{5}$$

pentru orice $n \geq 0$ (pentru mai multe informaţii, a se vedea Noor [47]). În 2007, Agarwal *ş.a.* au definit o nouă metodă iterativă prin

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)T x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n \end{cases} \tag{6}$$

$n \geq 0$ (pentru mai multe informaţii, a se vedea Agarwal *ş.a.* [2]). În 2014, Abbas *ş.a.* au definit noua metodă iterativă prin

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)T y_n + \alpha_n T z_n, \\ y_n = (1-\beta_n)T x_n + \beta_n T z_n, \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{cases} \tag{7}$$

pentru orice $n \geq 0$ (pentru mai multe informaţii, a se vedea Abbas şi Nazir [1]). În 2014, Thakur *ş.a.* au definit noua metodă iterativă prin

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)T x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)z_n + \beta_n T z_n, \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{cases} \tag{8}$$

pentru orice $n \geq 0$ (pentru mai multe informaţii, a se vedea Thakur *ş.a.* [60]). De asemenea, iteraţia S-Picard a fost definită prin

$$\begin{cases} x_{n+1} = T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)T x_n + \beta_n T z_n, \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{cases} \tag{9}$$

pentru orice $n \geq 0$ (pentru mai multe informaţii, a se vedea Gorsoy şi Karakaya [25], Ozturk [50]).

Fie $\{u_n\}_{n\geq 0}$ şi $\{v_n\}_{n\geq 0}$ două proceduri iterative care converg la acelaşi punct fix p şi $\|u_n - p\| \leq a_n$ respectiv $\|v_n - p\| \leq b_n$ pentru orice $n \geq 0$. Dacă şirurile $\{a_n\}_{n\geq 0}$ şi $\{b_n\}_{n\geq 0}$ converg la a respectiv b şi $\lim_{n\to\infty} \frac{\|a_n - a\|}{\|b_n - b\|} = 0$, atunci spunem că $\{u_n\}_{n\geq 0}$ converge mai repede decât $\{v_n\}_{n\geq 0}$ la p (a se vedea Berinde [10] şi Thakur *ş.a.* [60]).

Arătăm că alegerea unui tip de şir $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ în iteraţia Mann are un rol important în viteza de convergenţa a şirului $\{x_n\}_{n\geq 0}$.

Propoziţia 0.1. *Fie C o submulţime nevidă, închisă şi convexă a unui spaţiu Banach X, $x_1 \in C$, $T\colon C \to C$ o contracţie cu constanta $k \in (0,1)$ şi p un punct fix a lui T. Considerăm primul caz pentru iteraţia Mann. Dacă coeficienţii lui Tx_n sunt mai mari decât coeficienţii lui x_n, adică $1-\alpha_n < \alpha_n$ pentru orice $n \geq 0$ sau echivalent $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$ este un şir în $(\frac{1}{2},1)$, atunci iteraţia Mann converge mai repede decât iteraţia Mann în care coeficienţii lui x_n sunt mai mari decât coeficienţii lui Tx_n.*

Putem considera patru cazuri pentru scrierea metodei iterative Ishikawa. În rezultatul următor vom indica fiecare caz prin numerotare diferită. Similar cu ultimul rezultat, vrem să comparăm metoda iterativă Ishikawa cu ea însăşi în cele patru cazuri posibile.

Propoziţia 0.2. *Fie C o submulţime nevidă, închisă şi convexă a unui spaţiu Banach X, $x_0 \in C$, $T\colon C \to C$ o contracţie cu constanta $k \in (0,1)$ şi p un punct fix a lui T. Considerăm următoarele cazuri ale metodei iterative Ishikawa:*

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \end{cases} \tag{10}$$

şi

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) T y_n, \\ y_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n) T x_n, \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n) T x_n, \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha_n x_n + (1-\alpha_n) T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n \end{cases} \tag{13}$$

pentru orice $n \geq 0$. Dacă $1-\alpha_n < \alpha_n$ şi $1-\beta_n < \beta_n$ pentru orice $n \geq 0$, atunci cazul (10) converge mai repede decât celelalte (11), (12), (13).

De fapt, metoda Ishikawa este mai rapidă ori de câte ori coeficienţii lui Ty_n şi Tx_n sunt simultan mai mari decât coeficienţii lui x_n pentru orice $n \geq 0$.

Apoi, am considerat opt cazuri pentru scrierea metodei Noor. Prin utilizarea unei condiţii, am arătat că şirurile de coeficienţi $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$, $\{\beta_n\}_{n\geq 0}$ şi $\{\gamma_n\}_{n\geq 0}$ au roluri eficiente în viteza de convergenţă a şirului $\{x_n\}_{n\geq 0}$ în metoda Noor.

Teorema 0.10. *Fie C o submulţime nevidă, închisă şi convexă a unui spaţiu Banach X, $x_0 \in C$, $T\colon C \to C$ o contracţie cu constanta $k \in (0,1)$ şi p un punct fix a lui T.*

Considerăm cazul (5) *al metodei iterative Noor*

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)x_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T z_n, \\ z_n = (1-\gamma_n)x_n + \gamma_n T x_n \end{cases}$$

pentru orice $n \geq 0$. *Dacă* $1-\alpha_n < \alpha_n$, $1-\beta_n < \beta_n$ *şi* $1-\gamma_n < \gamma_n$ *pentru orice* $n \geq 0$, *atunci iteraţia* (5) *este mai rapidă decât celelalte cazuri posibile.*

După cum ştim, metoda iterativă Agarwal poate fi scrisă în următoarele patru cazuri:

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)Tx_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha_n Tx_n + (1-\alpha_n) T y_n, \\ y_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n) T x_n, \end{cases} \tag{15}$$

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha_n Tx_n + (1-\alpha_n) T y_n, \\ y_n = (1-\beta_n)x_n + \beta_n T x_n, \end{cases} \tag{16}$$

şi

$$\begin{cases} x_{n+1} = (1-\alpha_n)Tx_n + \alpha_n T y_n, \\ y_n = \beta_n x_n + (1-\beta_n) T x_n \end{cases} \tag{17}$$

pentru orice $n \geq 0$. Se poate arăta uşor că acest caz (14) converge mai repede decât celelalte pentru aplicaţii contractive. Vom consemna aceasta în următoarea lemă.

Lema 0.6. *Fie C o submulţime nevidă, închisă şi convexă a unui spaţiu Banach X, $x_1 \in C$, $T\colon C \to C$ o contracţie cu constanta $k \in (0,1)$ şi p un punct fix a lui T. Dacă $1-\alpha_n < \alpha_n$ şi $1-\beta_n < \beta_n$ pentru orice $n \geq 0$, atunci cazul* (14) *converge mai repede decât* (15), (16) *şi* (17).

Similar cu Teorema 0.10, putem dovedi că pentru aplicaţii contractive un caz din metoda Abbas converge mai repede decât celelalte cazuri posibile ori de câte ori elementele şirurilor $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$, $\{\beta_n\}_{n\geq 0}$ şi $\{\gamma_n\}_{n\geq 0}$ sunt în $(\frac{1}{2}, 1)$ pentru n suficient de mare.

Lema 0.7. *Fie C o submulţime nevidă, închisă şi convexă a unui spaţiu Banach X, $u_1 \in C$, $T\colon C \to C$ o contracţie cu constanta $k \in (0,1)$ şi p un punct fix a lui T. Considerăm următorul caz din metoda Abbas:*

$$\begin{cases} u_{n+1} = \alpha_n T v_n + (1-\alpha_n) T w_n, \\ v_n = (1-\beta_n)Tu_n + \beta_n T w_n, \\ w_n = (1-\gamma_n)u_n + \gamma_n T u_n \end{cases} \tag{18}$$

pentru orice n. Dacă $1-\alpha_n < \alpha_n$, $1-\beta_n < \beta_n$ şi $1-\gamma_n < \gamma_n$ pentru n suficient de mare, atunci cazul (18) *converge mai repede decât celelalte cazuri posibile.*

De asemenea, se poate arăta că pentru aplicaţii contractive cazul (8) al metodei Thakur-Thakur-Postolache converge mai repede decât celelalte cazuri posibile ori de câte ori elementele şirurilor $\{\alpha_n\}_{n\geq 0}$, $\{\beta_n\}_{n\geq 0}$ şi $\{\gamma_n\}_{n\geq 0}$ sunt în $(\frac{1}{2}, 1)$ pentru n suficient de mare. Vom consemna aceast rezultat după cum urmează.

Lema 0.8. *Fie C o submulţime nevidă, închisă şi convexă a unui spaţiu Banach X, $x_1 \in C$, $T\colon C \to C$ o contracţie cu constanta $k \in (0,1)$ şi p un punct fix a lui T. Dacă $1-\alpha_n < \alpha_n$, $1-\beta_n < \beta_n$ şi $1-\gamma_n < \gamma_n$ pentru n suficient de mare, atunci cazul* (8) *din metoda Thakur-Thakur-Postolache converge mai repede decât celelalte cazuri posibile.*

În cele din urmă, avem o situaţie similară pentru iteraţia S-Picard, pe care o consemnăm aici.

Lema 0.9. *Fie C o submulţime nevidă, închisă şi convexă a unui spaţiu Banach X, $x_1 \in C$, $T\colon C \to C$ o contracţie cu constanta $k \in (0,1)$ şi p un punct fix a lui T. Dacă $1-\alpha_n < \alpha_n$ şi $1-\beta_n < \beta_n$ pentru n suficient de mare, atunci cazul* (9) *din metoda S-Picard converge mai repede decât celelalte cazuri posibile.*

În secţiunea următoare, urmează compararea vitezelor de convergenţă a unor metode iterative diferite pentru aplicaţii contractive. Scopul nostru este să arătăm că viteza de convergenţă depinde de coeficienţi.

Teorema 0.11. *Fie C o submulţime nevidă, închisă şi convexă a unui spaţiu Banach X, $u_1 \in C$, $T\colon C \to C$ o contracţie cu constanta $k \in (0,1)$ şi p un punct fix a lui T. Considerăm cazul* (7) *din metoda Abbas*

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1-\alpha_n)Tv_n + \alpha_n Tw_n, \\ v_n = (1-\beta_n)Tu_n + \beta_n Tw_n, \\ w_n = (1-\gamma_n)u_n + \gamma_n Tu_n, \end{cases}$$

cazul (18) *din metoda Abbas*

$$\begin{cases} u_{n+1} = \alpha_n Tv_n + (1-\alpha_n)Tw_n, \\ v_n = (1-\beta_n)Tu_n + \beta_n Tw_n, \\ w_n = (1-\gamma_n)u_n + \gamma_n Tu_n, \end{cases}$$

şi cazul (8) *din metoda Thakur-Thakur-Postolache*

$$\begin{cases} u_{n+1} = (1-\alpha_n)Tu_n + \alpha_n Tv_n, \\ v_n = (1-\beta_n)w_n + \beta_n Tw_n, \\ w_n = (1-\gamma_n)u_n + \gamma_n Tu_n \end{cases}$$

pentru orice $n \geq 0$. *Dacă* $1-\alpha_n < \alpha_n$, $1-\beta_n < \beta_n$ *şi* $1-\gamma_n < \gamma_n$ *pentru* n *suficient de mare, atunci cazul* (18) *din metoda Abbas converge mai repede decât cazul* (8) *din metoda Thakur-Thakur-Postolache. De asemenea, cazul* (8) *din metoda Thakur-Thakur-Postolache este mai rapid decât cazul* (7) *din metoda Abbas.*

Utilizând o demonstraţie similară, se poate verifica următorul rezultat.

Teorema 0.12. *Fie* C *o submulţime nevidă, închisă şi convexă a unui spaţiu Banach* X, $x_1 \in C$, $T\colon C \to C$ *o contracţie cu constanta* $k \in (0,1)$, p *un punct fix a lui* T *şi* $\alpha_n, \beta_n, \gamma_n \in (0,1)$ *pentru orice* $n \geq 0$. *Atunci cazul* (6) *din metoda Agarwal este mai rapid decât cazul* (3) *din metoda Mann, cazul* (7) *din metoda Abbas este mai rapid decât cazul* (3) *din metoda Mann, cazul* (8) *din metoda Thakur-Thakur-Postolache este mai rapid decât cazul* (3) *din metoda Mann, cazul* (6) *din metoda Agarwal este mai rapid decât cazul* (4) *din metoda Ishikawa, cazul* (7) *din metoda Abbas este mai rapid decât cazul* (4) *din metoda Ishikawa şi cazul* (8) *din metoda Thakur-Thakur-Postolache este mai rapid decât cazul* (4) *din metoda Ishikawa.*

Pentru exemple şi reprezentări grafice care ilustrează aceste rezultate, consultaţi [22].

În capitolul 4, **Algoritmi iterativi pentru o clasă de inegalităţi cvasi variaţionale** introducem şi studiem o nouă clasă de inegalităţi cvasi variaţionale, cunoscute sub numele de inegalităţi cvasi variaţionale generale extinse, cu operatori multivoci. Se arată că inegalităţile cvasi variaţionale generale extinse sunt echivalente cu probleme de punct fix. Folosim această formulare alternativă echivalentă pentru a sugera şi analiza unele metode iterative. De asemenea, introducem o nouă clasă de ecuaţii Wiener-Hopf, cunoscute sub numele de ecuaţii Wiener-Hopf implicite generale extinse multivoce. Stabilim echivalenţa dintre inegalităţile cvasi variaţionale generale extinse multivoce şi ecuaţiile Wiener-Hopf implicite generale extinse multivoce. Folosind această echivalenţă, sugerăm şi analizăm unele metode iterative. Rezultatele din acest capitol continuă rezultatele lui Stampacchia [57], Shi [56], Noor *ş.a.* [44, 45, 46].

Rezultatele în acest capitol este: Teorema 4.1, Algoritmul 4.1, Algoritmul 4.2, Algoritmul 4.3, Algoritmul 4.4, Algoritmul 4.5, Algoritmul 4.6, Teorema 4.2, Corolarul 4.1, Algoritmul 4.7, Algoritmul 4.8, Algoritmul 4.9, Algoritmul 4.10, Algoritmul 4.11, Algoritmul 4.12 şi Teorema 4.3. Ele sunt publicate în [48] (Noor, MA, Noor, KI, Khan, AG, Ghiura, A: *Iterative algorithms for solving a class of quasi variational inequalities.* U.P.B. Sci. Bull., Series A, 78(3), 3-18 (2016)).

Fie H un spaţiu Hilbert real, a cărui normă şi produs scalar sunt notate cu $\|\cdot\|$ şi respectiv $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Fie $C(H)$ familia tuturor submulţimilor nevide, compacte ale lui H. Fie $T,\ V\colon H\to C(H)$ operatori multivoci. Fie $h_1,\ h_2\colon H\to H$ şi $N(\cdot,\cdot): H\times H\to H$ operatori univoci. Fiind dată o aplicaţie punct-mulţime $\Omega\colon u\to\Omega(u)$, care asociază o submulţime închisă şi convexă $\Omega(u)$ cu orice element $u\in H$, considerăm problema de a găsi $u,\ w,\ y\in H: w\in T(u),\ y\in V(u),\ h_1(u),\ h_2(u)\in\Omega(u)$ şi

$$\langle\rho N(w,y)+h_2(u)-h_1(u),h_1(v)-h_2(u)\rangle\geq 0,\quad\forall v\in H: h_1(v)\in\Omega(u)\tag{19}$$

unde $\rho>0$, este o constantă. Problema (19) se numeşte inegalitate cvasi variaţională generală extinsă multivocă. Aceasta are numeroase aplicaţii în domeniul mecanicii, fizicii, ştiinţelor pure şi aplicate, a se vedea: Facchinei *ş.a.* [20], Giannessi şi Maugeri [23], Kravchuk şi Neittaanmaki [34], Lenzen *ş.a.* [35], Liu şi Cao [36] şi referinţele de aici.

Lema 0.10. *Pentru un anumit $z\in H$, $u\in\Omega$ satisface inegalitatea*

$$\langle u-z,v-u\rangle\geq 0,\quad\forall v\in\Omega,$$

dacă şi numai dacă

$$u=P_\Omega[z],$$

unde P_Ω este proiecţia lui H într-o mulţime închisă şi convexă Ω.

Definim acum conceptul de monotonie tare pentru operatorul bifuncţie $N(\cdot,\cdot)$, care a fost introdus de Noor [42].

Definiţia 0.7. Operatorul univoc $N(\cdot,\cdot)$ spunem că este monoton tare în raport cu primul argument dacă, pentru orice $u_1,\ u_2\in H$, există o constantă $\alpha>0$, astfel încât

$$\langle N(w_1,\cdot)-N(w_2,\cdot),u_1-u_2\rangle\geq\alpha\|u_1-u_2\|^2,\quad\forall w_1\in T(u_1),\ w_2\in T(u_2).$$

Definiţia 0.8. Operatorul univoc $N(\cdot,\cdot)$ spunem că este Lipschitz continuu în raport cu primul argument, dacă există o constantă $\beta>0$, astfel încât

$$\|N(u_1,\cdot)-N(u_2,\cdot)\|\leq\beta\|u_1-u_2\|,\quad\forall u_1,\ u_2\in H.$$

Similar, putem defini monotonia tare şi Lipschitz continuitatea operatorului $N(\cdot,\cdot)$ în raport cu al doilea argument.

Definiţia 0.9. Operatorul multivoc $V\colon H\to C(H)$ spunem că este M-Lipschitz continuu, dacă există o constantă $\xi>0$ astfel încât

$$M(V(u_1),V(u_2))\le\xi\|u_1-u_2\|,\quad \forall u_1,\ u_2\in H,$$

unde $C(H)$ este familia tuturor submulţimilor nevide compacte ale lui H şi $M(\cdot,\cdot)$ este metrica Hausdorff pe $C(H)$, adică pentru orice două submulţimi nevide A şi B din H,

$$M(A,B)=\max\left\{\sup_{x\in A}d(x,B),\sup_{y\in B}d(A,y)\right\},$$

unde

$$d(x,B)=\inf_{y\in B}\|x-y\|\quad \text{şi}\quad d(A,y)=\inf_{x\in A}\|x-y\|.$$

Pentru a demonstra rezultatele noastre principale, următoarea lemă este foarte importantă.

Lema 0.11 ([40]). *Fie (H,d) un spaţiu metric complet, $T\colon H\to CB(H)$ un operator multivoc. Atunci, pentru orice x, $y\in H$, $u\in T(x)$, există $v\in T(y)$ astfel încât*

$$\|u-v\|\le M(T(x),T(y)).$$

În această secţiune, arătam că inegalitatea cvasi variaţională generală extinsă multivocă (19) este echivalentă cu o problemă de punct fix utilizând Lema 0.10. Utilizăm această formulare alternativă echivalentă pentru a discuta existenţa unei soluţii la problema (19).

Lema 0.12. *Fie $\Omega(u)$ o mulţime închisă şi convexă din H. Atunci $u,w,y\in H$ este o soluţie pentru (19) dacă şi numai dacă $u,w,y\in H$ satisface relaţia*

$$h_2(u)=P_{\Omega(u)}[h_1(u)-\rho N(w,y)],$$

unde $\rho>0$ este o constantă şi $P_{\Omega(u)}$ este proiecţia lui H într-o mulţime închisă şi convexă $\Omega(u)$.

Ipoteza 0.1. *Pentru o constantă $\nu>0$, operatorul implicit de proiecţie $P_{\Omega(u)}$ satisface condiţia*

$$\|P_{\Omega(u)}[w]-P_{\Omega(v)}[w]\|\le\nu\|u-v\|,\qquad \textit{pentru orice } u,v,w\in H.$$

Discutăm acum existenţa unei soluţii la problema (19) şi aceasta este motivaţia principală a următorului rezultat.

Teorema 0.13. *Fie $\Omega(u)$ o mulţime închisă şi convexă din H. Fie operatorul $N(\cdot,\cdot)$ monoton tare în raport cu primul argument cu constanta $\alpha > 0$ şi Lipschitz continuu în raport cu primul argument cu constanta $\beta > 0$. Fie operatorii h_1, $h_2\colon H \to H$ monoton tare cu constantele $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ şi respectiv Lipschitz continuu cu constantele $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$. Presupunem că operatorul $N(\cdot,\cdot)$ este Lipschitz continuu în raport cu al doilea argument cu constanta $\eta > 0$. Fie aplicaţiile T, $V\colon H \to C(H)$ M-Lipschitz continue cu constantele $\mu > 0$ şi respectiv $\xi > 0$. Dacă are loc ipoteza* 0.1 *şi*

$$\theta = k + t(\rho) + \rho\eta\xi < 1, \tag{20}$$

şi

$$\begin{aligned} k &= \nu + \sqrt{1 - 2\sigma_1 + \delta_1^2} + \sqrt{1 - 2\sigma_2 + \delta_2^2}, \\ t(\rho) &= \sqrt{1 - 2\rho\alpha + \rho^2\beta^2\mu^2}, \end{aligned}$$

atunci există o soluţie u, w, $y \in H : w \in T(u)$, $y \in V(u)$ şi $h_1(u)$, $h_2(u) \in \Omega(u)$ satisface problema (19).

În secţiunea următoare, am dezvoltat şi discutat unele metode iterative pentru rezolvarea problemei (19). De asemenea, analizăm convergenţa acestor metode iterative.

Algoritmul 0.1. *Presupunem că T, $V\colon H \to C(H)$ sunt operatori multivoci. Presupunem că $N\colon H \times H \to H$, h_1, $h_2\colon H \to H$ sunt operatori univoci. Fie $\Omega(u)$ o mulţime închisă şi convexă din spaţiul Hilbert real H. Pentru u_0, w_0, $y_0 \in H$, fie $w_0 \in T(u_0)$, $y_0 \in V(u_0)$, $h_1(u_0) \in \Omega(u_0)$, $h_2(u_0) \in \Omega(u_0)$ şi*

$$u_1 = (1-\lambda)u_0 + \lambda\left\{u_0 - h_2(u_0) + P_{\Omega(u_0)}\left[h_1(u_0) - \rho N(w_0, y_0)\right]\right\}.$$

Utilizând Lema 0.11*; deoarece $w_0 \in T(u_0)$, $y_0 \in V(u_0)$, atunci există $w_1 \in T(u_1)$, $y_1 \in V(u_1)$ astfel încât*

$$\|w_0 - w_1\| \le M(T(u_0), T(u_1))$$

$$\|y_0 - y_1\| \le M(V(u_0), V(u_1)),$$

unde $M(\cdot,\cdot)$ este metrica Hausdorff pe $C(H)$. Fie

$$u_2 = (1-\lambda)u_1 + \lambda\left\{u_1 - h_2(u_1) + P_{\Omega(u_1)}\left[h_1(u_1) - \rho N(w_1, y_1)\right]\right\}.$$

Prin continuarea acestui proces, putem obţine şirurile $\{u_n\}$, $\{w_n\}$, $\{y_n\}$ astfel încât

$$w_n \in T(u_n) : \|w_{n+1} - w_n\| \le M(T(u_{n+1}), T(u_n))$$

$$y_n \in V(u_n) : \|y_{n+1} - y_n\| \le M(V(u_{n+1}), V(u_n))$$

$$u_{n+1} = (1-\lambda)u_n + \lambda\left\{u_n - h_2(u_n) + P_{\Omega(u_n)}\left[h_1(u_n) - \rho N(w_n, y_n)\right]\right\},$$

pentru $n = 0, 1, 2, \ldots$.

În teorema următoare, vom arăta că soluţia aproximativă obţinută din Algoritmul 0.1 converge tare la $u, w, y \in H$, soluţia problemei (19).

Teorema 0.14. *Fie $\Omega(u)$ orice mulţime închisă şi convexă din H. Fie operatorul $N(\cdot,\cdot)$ monoton tare în raport cu primul argument cu constanta $\alpha > 0$ şi Lipschitz continuu în raport cu primul argument cu constanta $\beta > 0$. Fie operatorii h_1, $h_2\colon H \to H$ monoton tare cu constantele $\sigma_1 > 0$, $\sigma_2 > 0$ şi respectiv Lipschitz continuu cu constantele $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$. Presupunem că operatorul $N(\cdot,\cdot)$ este Lipschitz continuu în raport cu al doilea argument cu constanta $\eta > 0$. Fie aplicaţiile T, $V\colon H \to C(H)$ M-Lipschitz continue cu constantele $\mu > 0$ şi respectiv $\xi > 0$. Dacă au loc ipoteza* 0.1 *şi relaţia* (20)*, atunci există o soluţie u, w, $y \in H : w \in T(u)$, $y \in V(u)$ şi $h_1(u)$, $h_2(u) \in \Omega(u)$ satisface problema* (19)*, iar şirurile $\{u_n\}$, $\{w_n\}$ şi $\{y_n\}$ generate de Algoritmul* 0.1 *converg tare la u, w şi respectiv y din H.*

Acum, vom introduce o nouă clasă de ecuaţii Wiener-Hopf, care se numesc ecuaţii Wiener-Hopf implicite generale extinse multivoce. Vom stabili echivalenţa dintre ecuaţiile Wiener-Hopf implicite generale extinse multivoce şi problema (19). Prin utilizarea acestei echivalenţe, sugerăm o serie de noi metode iterative pentru rezolvarea diferitele clase ale problemei (19) şi forme variate ale acesteia.

Fie operatorii neliniari multivoci T, $V\colon H \to C(H)$ operatorii $N(\cdot,\cdot) : H \times H \to H$ şi h_1, $h_2\colon H \to H$ univoci. Presupunem că operatorul invers a lui h_2 există, considerăm problema de a găsi z, u, w, $y \in H : w \in T(u)$, $y \in V(u)$ şi

$$N(w,y) + \rho^{-1} Q_{\Omega(u)}[z] = 0, \tag{21}$$

unde $Q_{\Omega(u)} = I - h_1\left(h_2^{-1} P_{\Omega(u)}\right)$, I este operatorul identitate şi $\rho > 0$ este o constantă. Ecuaţia (21) este cunoscută ca ecuaţiile Wiener-Hopf implicite generale extinse multivoce.

Lema 0.13. *Problema* (19) *are o soluţie u, w, $y \in H : w \in T(u)$, $y \in V(u)$, şi $h_1(u)$, $h_2(u) \in \Omega(u)$, dacă şi numai dacă problema* (21) *are o soluţie z, u, w, $y \in H : w \in T(u)$, $y \in V(u)$, furnizată de*

$$h_2(u) = P_{\Omega(u)}[z],$$

şi

$$z = h_1(u) - \rho N(w,y),$$

unde $\rho > 0$ este o constantă.

Lema 0.13 implică faptul că problemele (19) şi (21) sunt equivalente. Această formulare echivalentă este folosită pentru a sugera şi analiza câteva metode iterative de rezolvare a problemei (19).

Algoritmul 0.2. *Pentru* z_0, u_0, w_0, $y_0 \in H : w_0 \in T(u_0), y_0 \in V(u_0)$, *calculăm şirurile* $\{z_n\}, \{u_n\}, \{w_n\}$, *and* $\{y_n\}$ *prin schema iterativă*

$$h_2(u_n) = P_{\Omega(u_n)}[z_n]$$

$$w_n \in T(u_n) : \|w_{n+1} - w_n\| \leq M(T(u_{n+1}), T(u_n))$$

$$y_n \in V(u_n) : \|y_{n+1} - y_n\| \leq M(V(u_{n+1}), V(u_n))$$

$$z_{n+1} = h_1(u_n) - \rho N(w_n, y_n), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Apoi, am discutat analiza convergenţei Algoritmului 0.2.

Teorema 0.15. *Dacă au loc condiţiile din Teorema* 0.13, *există* z, u, w, $y \in H : w \in T(u)$ *şi* $y \in V(u)$ *verificând problema* (21) *iar şirurile* $\{z_n\}$, $\{u_n\}$, $\{w_n\}$ *şi* $\{y_n\}$ *generate prin Algoritmul* 0.2 *converg tare la* z, u, w *şi respectiv* y *din* H.

Pentru exemple, corolarii şi cazuri particulare ale acestor algoritmi, utilizaţi în rezolvarea unor clase importante de inegalităţi cvasi variaţionale, consultaţi [48].

Bibliografie

[1] Abbas, M, Nazir, T: A new faster iteration process applied to constrained minimization and feasibility problems. Mat. Vesn. **66**(2), 223-234 (2014)

[2] Agarwal, RP, O'Regan, D, Sahu, DR: Iterative construction of fixed points of nearly asymptotically nonexpansive mappings. J. Nonlinear Convex Anal. **8**(1), 61-79 (2007)

[3] Akbulut, S, Ozdemir, M: Picard iteration converges faster than Noor iteration for a class of quasi-contractive operators. Chiang Mai J. Sci. **39**(4), 688-692 (2012)

[4] Argyros, IK: Iterations converging faster than Newton's method to the solutions of nonlinear equations in Banach space. Ann. Univ. Sci. Bp. Rolando Eötvös Nomin., Sect. Comput. **11**, 97-104 (1991)

[5] Babu, GVR, Vara Prasad, KNVV: Mann iteration converges faster than Ishikawa iteration for the class of Zamfirescu operators. Fixed Point Theory Appl. **2006**, Article ID 49615 (2006)

[6] Baiocchi, A, Capelo, A: Variational and Quasi-Variational Inequalities. J Wiley and Sons. New York (1984)

[7] Bakhtin, IA: The contraction mapping principle in quasimetric spaces. Funct. Anal. **30**, 26-37 (1989)

[8] Banach, S: Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leurs applications aux équations intégrals. Fundam. Math. **3**, 133-181 (1922)

[9] Batul, S, Kamran, T: C^*-Valued contractive type mappings. Fixed Point Theory Appl. 2015:142 (2015)

[10] Berinde, V: Picard iteration converges faster than Mann iteration for a class of quasi-contractive operators. Fixed Point Theory Appl. **2004**(2), 97-105 (2004)

[11] Berinde, V, Berinde, M: The fastest Krasnoselskij iteration for approximating fixed points of strictly pseudo-contractive mappings. Carpath. J. Math. **21**(1-2), 13-20 (2005)

[12] Berinde, V: A convergence theorem for Mann iteration in the class of Zamfirescu operators. An. Univ. Vest Timis., Ser. Mat.-Inform. **45**(1), 33-41 (2007)

[13] Berinde, V: Iterative Approximation of Fixed Points. Springer, Berlin (2007)

[14] Bruck, RE, Kuczumow, T, Reich, S: Convergence of iterates of asymptotically nonexpansive mappings in Banach spaces with the uniform Opial property. Colloq. Math. **65**, 169-179 (1993)

[15] Chidume, CE, Ofoedu, EU, Zegeye, H: Strong and weak convergence theorems for asymptotically nonexpansive mappings. J. Math. Anal. Appl. **280**, 364-374 (2003)

[16] Chidume, CE, Shahzad, N, Zegeye H: Convergence theorems for mappings which are asymptotically nonexpansive in the intermediate sense. Numer. Funct. Anal. Optim. **25**(3-4), 239-257 (2004)

[17] Chugh, R, Kumar, S: On the rate of convergence of some new modified iterative schemes. Am. J. Comput. Math. **3**, 270-290 (2013)

[18] Czerwick, S: Contraction mappings in b-metric spaces. Acta Math. Inform. Univ. Ostrav. **1**, 5-11 (1993)

[19] Czerwick, S: Nonlinear set-valued contraction mappings in b-metric spaces. Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena **46**, 263-276 (1998)

[20] Facchinei, F, Kanzow, C, Sagratella, S: Solving quasi-variational inequalities via their KKT conditions. Math. Program Ser. A. **144**(1),369-412 (2014)

[21] Falset, JG, Kaczor, W, Kuczumow, T, Reich, S: Weak convergence theorems for asymptotically nonexpansive mappings and semigroups. Nonlinear Anal. **43**(3), 377-401 (2001)

[22] Fathollahi, S, **Ghiura, A**, Postolache, M, Rezapour, S: A comparative study on the convergence rate of some iteration methods involving contractive mappings. Fixed Point Theory Appl. 2015:234 (2015)

[23] Giannessi, F, Maugeri, A: Variational Inequalities and Network Equilibrium Problems. Plenum Press, New York (1995)

[24] Glowinski, R, Lions, JL, Tremolieres, R: Numerical Analysis of Variational Inequalities. North-Holland, Amsterdam (1981)

[25] Gorsoy, F, Karakaya, V: A Picard S-hybrid type iteration method for solving a differential equation with retarded argument (2014). arXiv: 1403.2546v2 [math.FA]

[26] Guo, WP, Guo, W: Weak convergence theorems for asymptotically nonexpansive non-self mappings, Appl. Math. Lett. **24**, 2181-2185 (2011)

[27] Guo, WP, Cho, YJ, Guo, W: Convergence theorems for mixed type asymptotically nonexpansive mappings, Fixed Point Theory Appl. 2012:224 (2012)

[28] Ishikawa, S: Fixed points by a new iteration method. Proc. Am. Math. Soc. **44**, 147-150 (1974)

[29] Kamran, T, Postolache, M, **Ghiura, A**, Batul, S, Ali, R: The Banach contraction principle in C^*-algebra-valued b-metric spaces with application. Fixed Point Theory Appl. 2016:10 (2016)

[30] Khamsi, MA, Kirk, W: An Introduction to Metric Spaces and Fixed Point Theory. A Wiley - Interscience Publication (2001)

[31] Khamsi, MA: Remarks on Carisit's fixed point theorem. Nonlinear Anal. **71**(1-2), 227-231 (2009)

[32] Kinderlehrer, D, Stampacchia, G: An Introduction to Variational Inequalities and their Applications. Academic Press, London, England (1981)

[33] Kirk, W, Shahzad, N: Fixed Point Theory in Distance Spaces. Springer, Berlin (2014)

[34] Kravchuk, AS, Neittaanmaki, PJ: Variational and Quasi Variational Inequalities in Mechanics. Springer, Dordrecht, Holland (2007)

[35] Lenzen, F, Becker, F, Lellmann, J, Petra, S, Schnorr, CA: Class of quasi-variational inequalities for adaptive image denoising and decomposition. Comput Optim. Appl. **54**, 371-398 (2013)

[36] Liu, Q, Cao, A: A recurrent neural network based on projection operator for extended general variational inequalities. IEEE Trans. Syst. Man. Cybers. Part B Cyber **40**, 928-938 (2010)

[37] Ma, Z, Jiang, L, Sun, H: C^*-algebra-valued metric spaces and related fixed point theorems. Fixed Point Theory Appl. **2014**, 206 (2014)

[38] Mann, WR: Mean value methods in iteration. Proc. Am. Math. Soc. **4**, 506-510 (1953)

[39] Murphy, GJ: C^*-Algebras and Operator Theory. Academic Press, London (1990)

[40] Nadler Jr, SB: Multi-valued contraction mappings. Pacific J. Math. **30**, 475-488 (1969)

[41] Noor, MA: Wiener-Hopf equations and variational inequalities. J. Optim Theory Appl. **79**, 197-206 (1993)

[42] Noor, MA: Generalized multivalued quasi-variational inequalities (II). Comput Math. Appl. **35**, 63-78 (1998)

[43] Noor, MA: Variational Inequalities and Applications. Lectures Notes, Mathematics Department, COMSTAS Institute of Information Technology,Islamabad, Pakistan (2009-2013)

[44] Noor, MA, Noor, KI: Sensitivity analysis of some quasi variational inequalities. J. Adv. Math. Stud. **6**, 43-52 (2013)

[45] Noor, MA, Noor, KI, Khan, AG: Some iterative schemes for solving extended general quasi variational inequalities. Appl. Math. Inf. Sci. **7**, 917-925 (2013)

[46] Noor, MA, Noor, KI, Khan, AG: Dynamical systems for quasi variational inequalities. Ann. Funct. Anal. **6**, 193-209 (2015)

[47] Noor, MA: New approximation schemes for general variational inequalities. J. Math. Anal. Appl. **251**, 217-229 (2000)

[48] Noor, MA, Noor, KI, Khan, AG, **Ghiura, A**: Iterative algorithms for solving a class of quasi variational inequalities. U.P.B. Sci. Bull. Ser. A **78**(3), 3-18 (2016)

[49] Opial, Z: Weak convergence of the sequence of successive approximations for nonexpansive mappings. Bull. Amer. Math. Soc. **73**, 591-597 (1967)

[50] Ozturk Celikler, F: Convergence analysis for a modified SP iterative method. Sci. World J. **2014**, Article ID 840504 (2014)

[51] Popescu, O: Picard iteration converges faster than Mann iteration for a class of quasi-contractive operators. Math. Commun. **12**(2), 195-202 (2007)

[52] Saluja, GS: Convergence theorems for two asymptotically nonexpansive non-self mappings in uniformly convex Banach spaces. J. Indian Math. Soc. **81**(3-4), 369-385 (2014)

[53] Saluja, GS, Postolache, M, **Ghiura, A**: Convergence theorems for mixed type asymptotically nonexpansive mappings in the intermediate sense. J. Nonlinear Sci. Appl. **9**, 5119-5135 (2016)

[54] Schu, J: Weak and strong convergence to fixed points of asymptotically nonexpansive mappings. Bull. Austral. Math. Soc. **43**(1), 153-159 (1991)

[55] Shehwar, D, Batul, S, Kamran, T, **Ghiura, A**: Caristi's fixed point theorem on C^*-algebra-valued metric spaces. J. Nonlinear Sci. Appl. **9**, 584-588 (2016)

[56] Shi, P: Equivalence of variational inequalities with Wiener-Hopf equations. Proc. Amer. Math. Soc. **111**, 339-346 (1991)

[57] Stampacchia, G: Formes bilineaires coercitives sur les ensembles convexes. C. R. Acad. Sci. Paris **258**, 4413-4416 (1964)

[58] Takahashi, W, Kim, GE: Approximating fixed points of nonexpansive mappings in Banach spaces. Math. Japonoica **48**(1), 1-9 (1998)

[59] Tan, KK, Xu, HK: Approximating fixed points of nonexpansive mappings by the Ishikawa iteration process. J. Math. Anal. Appl. **178**, 301-308 (1993)

[60] Thakur, D, Thakur, BS, Postolache, M: New iteration scheme for numerical reckoning fixed points of nonexpansive mappings. J. Inequal. Appl. 2014:328 (2014)

[61] Wang, L: Strong and weak convergence theorems for common fixed point of non-self asymptotically nonexpansive mappings. J. Math. Anal. Appl. **323**(1), 550-557 (2006)

[62] Wei, S, Guo, WP: Strong convergence theorems for mixed type asymptotically nonexpansive mappings. Comm. Math. Res. **31**, 149-160 (2015)

[63] Wei, S, Guo, WP: Weak convergence theorems for mixed type asymptotically nonexpansive mappings. J. Math. Study **48**(3), 256-264 (2015)